

# CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

---

N<sup>o</sup>. 5. *Janvier* 1813. (2<sup>e</sup>. volume.)

---

Tulle, le 15 septembre 1812.

§. I<sup>er</sup>.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE;

Par M. BRIANCHON, Officier d'artillerie.

PROBLÈME.

I.

« Décrire une section conique assujettie à passer par  $n$  points et à toucher  $5 - n$  droites données. » ( $n$  ne peut avoir que l'une des six valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.)

Voici quelques-uns des cas pour lesquels ce problème peut être résolu avec la règle seule.

II.

$n = 0$ . On connoît cinq droites que la courbe doit toucher, c'est-à-dire qu'on veut inscrire une section conique à un pentagone donné. Les cinquième et huitième numéros du premier volume de la *Correspondance* contiennent une méthode pour déterminer, sans compas, non-seulement une infinité d'autres tangentes, mais encore les points de contact de chacune de ces tangentes. Les points où le pentagone donné est touché par la courbe, s'obtiennent aussi par des intersections de lignes droites.

## III.

Pl. 1.  $n = 1$ . On a pour conditions quatre droites tangentes  $AB, BC, CE, EA$ , et un point  $D$  de la courbe placé sur l'une  $CE$  de ces droites. Ce qui revient à inscrire une section dans un quadrilatère  $ABCE$ , dont un des côtés  $CE$  doit toucher la courbe en un point connu  $D$ . (Fig. 1, pl. 1.)

*Construction.*

Joignez, par une droite indéfinie, le point de contact  $D$  avec l'un des sommets opposés du quadrilatère donne, avec  $A$  par exemple; puis, d'un point quelconque de  $AD$ , tirez aux sommets  $B, C$ , des droites prolongées suffisamment pour couper  $b$  et  $c$ , respectivement, les côtés, ou les prolongemens des côtés  $CE, EA$ : la ligne droite  $bc$  sera tangente à la courbe cherchée, et on en déterminera le point de contact avec la règle seulement. (Cinquième cahier du premier volume, page 151.)

*Scholie.*

Si  $b$  se confond avec le sommet  $E$ ,  $c$  sera le point de contact de  $EA$ . Donc on peut trouver les trois autres points de contingence du quadrilatère  $ABCE$  sans faire usage du compas.

## IV.

Fig. 2.  $n = 2$ . Trois tangentes  $BC, CE, EB$  sont données, ainsi que les points de contact  $D, A$  des deux dernières  $CE, EB$ , respectivement.

*Construction.*

D'un point pris à volonté sur l'indéfinie  $AD$ , menez des droites aux sommets  $B, C$ , du triangle connu  $BCE$ , et prolongez-les s'il le faut, pour qu'elles rencontrent en  $b$  et  $c$ , respectivement les côtés opposés  $CE, EB$ ; la droite  $bc$  sera tangente à la section conique demandée, et on en obtiendra le point de contact comme il a été dit précédemment (§. III, *scholie*). Le point où  $BC$  touche la courbe se trouve sur la droite qui joint le sommet avec le point d'intersection de  $CA$  et  $BD$ .

## V.

Fig. 3.  $n = 3$ . Déterminer une section conique qui touche des droites  $BI, DI$ , et passe par trois points  $B, D, C$ , dont les droites

premiers,  $B, D$ , sont situés, respectivement, l'un sur la première, l'autre sur la seconde droite.

*Construction.*

Soit  $I$  le point de concours des deux droites connues  $BI, DI$ . Ayant tiré les indéfinies  $CB, CD$ , on tracera arbitrairement une droite qui passe par  $I$ , et coupe en  $H$  et  $K$ , respectivement, les côtés  $CB, CD$  de l'angle  $BCD$ ; et l'intersection  $F$ , des deux droites  $HD, KB$ , appartiendra à la courbe qu'on s'est proposé de construire.

Pour avoir maintenant la tangente en  $F$ , par  $H$  et par le point de jonction des deux diagonales du quadrilatère inscrit  $BCDF$ , menez une droite qui coupe en  $P$  et  $Q$ , respectivement, les deux droites  $BI, DI$ ;  $PF$  et  $QC$  seront tangentes à la section conique en  $F$  et  $C$  respectivement.

V I.

$n = 4$ . On donne quatre points  $B, C, D, E$ , de la courbe, Fig. 4. et, de plus, une tangente  $BI$  passant par l'un,  $B$ , de ces points.

*Construction.*

Tracez les indéfinies  $BC, CD$ ; et par le point  $I$ , où la tangente donnée est rencontrée, par  $DE$ , menez à volonté une droite prolongée suffisamment pour couper en  $H$  et  $K$ , respectivement, les deux côtés  $BC, CD$ , de l'angle  $BCD$ . Joignez ensuite  $H$  et  $E, K$  et  $B$  par des droites dont le point de concours  $F$  sera un de ceux de la section conique.

Ayant ainsi cinq points  $B, C, D, E, F$ , de la courbe, la fig. 4 montre par quelle construction simple on détermine la tangente en l'un quelconque,  $B$ , de ces cinq points.

V I I.

$n = 5$ . Circonscrire une courbe du second ordre à un pentagone donné (1<sup>er</sup> volume de la Correspondance, n<sup>o</sup>. 8, p. 310).

V I I I.

Revenons sur l'hypothèse  $n = 1$ . Ce cas peut être résolu avec la règle, quand le point donné  $D$  se trouve sur l'une,  $BE$ , des deux diagonales du quadrilatère circonscrit  $ABCE$ . Fig. 5.

*Construction.*

Par les extrémités,  $A, C$ , de l'autre diagonale, et par  $D$ ,

menez les droites indéfinies  $AD$ ,  $CD$ , qui coupent en  $a$  et  $c$  les côtés  $CE$ ,  $AE$ , respectivement. Soit  $R$  le point de rencontre de  $AC$  et  $ac$ ; la droite  $RD$  touchera la courbe en  $D$ , et ainsi la question est réduite à celle du §. III.

## IX.

Fig. 6. Dans l'hypothèse  $n = 4$ , la construction s'effectue aussi sans compas, lorsque la tangente donnée  $IT$  passe par l'un,  $I$ , des points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit  $BCDE$ .

*Construction.*

$R$  étant le point de concours des deux autres côtés opposés, et  $O$  celui des deux diagonales du quadrilatère connu  $BCDE$ , tracez l'indéfinie  $RO$  qui, par son intersection avec  $IT$ , déterminera le point  $T$  où cette tangente  $IT$  doit toucher la section conique. Le problème est donc ramené à ceux des §. VI et VII.

## X.

Quelques-uns de ces problèmes sont traités spécialement dans les cours d'architecture. Consultez, à cet égard, un ouvrage de *Blondel*, intitulé : *Résolution des quatre principaux Problèmes d'Architecture*; au Louvre, 1673, in-folio.

## XI.

Toutes les constructions précédentes se déduisent de la propriété bien connue des hexagones inscrits aux courbes du second degré. Il paroît que cette propriété a été découverte par *Pascal*, qui se contenta de l'indiquer dans son *Essai sur les Coniques*, publié en 1640. Elle a depuis été démontrée et reproduite sous d'autres formes par plusieurs géomètres; et cette diversité dans la manière d'énoncer une même proposition a beaucoup contribué à en faire connoître toute la fécondité. Tout porte à croire que ce théorème fondamental est le même que celui de l'*hexagone mystique*, sur lequel *Pascal* avoit établi tout un traité de sections coniques, qui ne nous est pas parvenu. (*Voyez*, dans les Œuvres de cet auteur, une lettre écrite par *Leibnitz* et placée à la fin du 5°. ou dernier volume de l'édition de 1779.)

## XII.

L'hexagone de *Pascal* conduit à cet autre théorème général :  
 « Si on construit une suite de triangles dont les sommets soient

» respectivement sur les droites données , et dont les deux  
 » premiers côtés, prolongés, s'il le faut, passent respectivement  
 » par deux points donnés, tous les derniers côtés de ces triangles  
 » toucheront une même courbe du second ordre dont les points  
 » de contact pourront s'obtenir avec la règle seulement. »

Cette proposition est démontrée sous un autre énoncé , dans le  
 13<sup>e</sup>. cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, pag. 301, §. IX.

La courbe enveloppée par les troisièmes côtés de ces triangles  
 variables se réduit à un point dans les deux cas suivans :

1<sup>o</sup>. Quand les trois droites fixes se croisent toutes en un même  
 point (c'est le théorème du §. I<sup>er</sup>. de la page 297 du 13<sup>e</sup>. cahier);

2<sup>o</sup>. Lorsque la droite qui joint les deux points donnés passe  
 par le point de concours des deux droites fixes qui comprennent  
 tous les derniers côtés des triangles mobiles. Ce cas particulier  
 n'est autre que la cent trente-neuvième proposition de *Pappus* ,  
 qu'on retrouve dans le 1<sup>er</sup>. vol. de la *Correspondance* (8<sup>e</sup>. ca-  
 hier, pag. 308) , et dans le 10<sup>e</sup>. cahier du Journal de l'Ecole  
 Polytechnique, pag. 13.

*Analyse de plusieurs Mémoires de Géométrie; lue à la pre-  
 mière Classe de l'Institut, le 14 décembre 1812, par  
 Ch. DUPIN, Capitaine en premier au Corps du Génie  
 maritime.*

Vers la fin de 1805 , au milieu d'un voyage que je dus faire  
 pour me rendre de la Hollande en Italie où j'étais appelé, je  
 commençai les recherches dont j'ai l'honneur de vous présenter  
 les résultats.

Je les ai continuées pendant 1806 à Gênes, et pendant 1807 à  
 Toulon, toujours dans les momens de loisir que me laissait mon  
 service.

Au commencement de 1808 j'obtins de suivre l'amiral Gan-  
 theaume dans les Iles Ioniennes, et d'y rester. Toujours aux  
 extrémités de l'Empire, je me suis vu forcé, par des circon-  
 stances uniques peut être, de me livrer à mes recherches mathé-  
 matiques, je dirai presque sans secours, sans conseils, sans  
 livres même. Il m'a fallu souvent épuiser mes forces pour  
 retrouver des vérités déjà connues, ou les démontrer de nouveau.  
 Enfin, sans cesse occupé par mille objets divers et commandé  
 par les devoirs de mon état, c'est le travail d'un ingénieur que  
 je vous présente, et non le fruit des méditations d'un savant.  
 J'annonce ainsi que je ne me bornerai à des principes mathéma-  
 tiques qui ne seront pas d'une grande élévation, mais dont l'usage

dans les arts peut être toujours utile et quelquefois important.

Mon objet principal est de développer la théorie de la courbure des surfaces, et celle des contacts du même ordre; puis de montrer à-la-fois, par des explications nombreuses puisées dans les travaux des services publics, et l'utilité dont peut être cette même théorie, et les moyens généraux de s'en servir.

J'ai donc divisé cet ouvrage en deux parties, la théorie et les applications : chacune d'elles est composée de cinq mémoires. Les trois premiers, et les seuls dont je doive entretenir la Classe aujourd'hui, traitent de la courbure des surfaces considérée à partir d'un point unique; les deux suivans envisagent cette courbure sur toute l'étendue des surfaces.

J'ai développé séparément la même théorie, et par la géométrie pure, et par l'application de l'analyse, sans figures, sans constructions accessoires ou préliminaires. J'avois, pour suivre cette méthode, les plus grands et les plus beaux exemples, dans les traités de géométrie et de mécanique publiés depuis peu d'années par nos mathématiciens les plus illustres. Mais pour donner la même généralité aux méthodes de la géométrie rationnelle, il m'a fallu chercher souvent une route, pour ainsi dire nouvelle, et je me hâte d'en prévenir; afin qu'on me pardonne d'être resté trop au-dessous de mon sujet en la suivant.

Je vais maintenant exposer les principaux résultats auxquels je crois être parvenu.

Je démontre, d'abord, par la géométrie pure, un principe évident pour tous ceux qui n'y ont pas profondément réfléchi : c'est que toute étendue à deux dimensions, je veux dire toute surface, ne peut généralement avoir en chacun de ses points plus d'un seul plan tangent, et qu'en chaque point elle est susceptible d'avoir une tangence, sous toutes les directions possibles, avec un seul et même plan : c'est précisément celui qu'on appelle *le plan tangent*.

Passant ensuite aux contacts du second ordre, j'examine les conditions nécessaires pour qu'un tel contact ait lieu entre les surfaces, à partir d'un point qui leur est commun, et sous toutes les directions possibles.

Il existe toujours une infinité de surfaces du second degré, qui peuvent osculer ainsi une surface quelconque, en chacun de ses points (qui n'est pas un point singulier).

Or, parmi toutes ces osculatrices du second degré, il en est encore une infinité ayant pour axe la normale de la surface au point donné qui, par conséquent, est un des sommets de ces osculatrices.

Et comme au sommet d'une surface du second degré, se croisent à angle droit deux sections planes principales, l'une dont la courbure est un maximum, l'autre un minimum (relativement

à toutes les sections normales ), toutes les propriétés de la courbure des surfaces, trouvées par Euler et par M. Monge, se présentent ici comme les conséquences nécessaires de cette première remarque.

Ainsi, par exemple, les deux sections principales de l'osculatrice du second degré sont celles du maximum et du minimum de courbure; elles sont tangentes aux sections analogues de la surface osculée; elles sont d'ailleurs à angle droit.

Donc en chaque point d'une surface quelconque (non singulier), pour toutes les sections normales, il y a simplement deux directions, l'une de plus grande et l'autre de moindre courbure; et ces deux directions sont constamment à angle droit. Les courbes tracées par M. Monge, tangentielllement à l'une de ces directions, et les courbes qu'il a tracées tangentielllement à la seconde direction, forment donc deux systèmes de lignes trajectoires orthogonales: ce sont les lignes de courbure.

De plus, dans le cas général, où les axes d'une surface du second degré sont inégaux, les seules normales qui puissent couper un des axes, sont dans les deux sections principales qui contiennent cet axe: Donc aussi sur les surfaces quelconques, à partir d'une première normale, on ne peut trouver de normales qui la rencontrent, que dans deux directions différentes, l'une suivant la plus grande, l'autre suivant la moindre courbure; et ces deux directions sont constamment orthogonales. Ces normales, qui se rencontrent consécutivement, vont former deux séries de surfaces développables, celles d'une série traversant à angle droit toutes celles de l'autre série; les normales elles-mêmes seront les intersections de ces développables, etc.

Voilà comment, par la simple substitution d'une osculatrice du second degré, aux surfaces quelconques, un facile enchaînement de conséquences nous conduit aux propriétés les plus générales de la courbure des surfaces.

Mais il ne suffit pas de connoître des théorèmes remarquables sur cette courbure, il faut, dans tous les cas, savoir la mesurer, pour en conserver les données, et la reproduire au besoin: c'est ce que nous allons bientôt faire.

Après avoir déduit ces premières vérités du rapprochement des surfaces quelconques avec les surfaces du second degré, je compare entr'elles les surfaces les plus générales, et je cherche les conditions de leurs contacts de différens ordres: voici le théorème fondamental de cette seconde partie.

Si nous prenons un point sur une surface générale, et que, du plan tangent en ce point à la surface, partent des ordonnées, ou rectilignes, ou curvilignes, qui, suivant une loi quelconque, aient leur point d'application sur la surface;

Ces points d'application restent toujours à la même distance du plan tangent; enfin, les ordonnées n'ayant de fixe que leur origine sur ce plan, et variant d'ailleurs arbitrairement, et d'étendue, et de forme, et de direction dans l'espace :

Pourvu qu'à partir du point donné, aucune des ordonnées ne soit tangente à la surface primitive.

*Premièrement*, quelle que soit la transformation et la transposition imprimées au système des ordonnées, l'infinité des surfaces ainsi produites seront, au point donné, osculatrices de la primitive; elles auront avec elle un contact du second ordre.

*Secondement*, Si les nouvelles ordonnées sont à leur origine tangentes aux ordonnées primitives, c'est-à-dire, ont avec elles un contact du *premier* ordre, l'infinité des surfaces ainsi produites auront au point donné un contact du *troisième* ordre avec la surface primitive.

*Troisièmement*, si les nouvelles ordonnées ont à leur origine un contact du *second* ordre avec les ordonnées primitives, l'infinité des surfaces ainsi produites, auront, au point donné, un contact du *quatrième* ordre avec la surface primitive.

*Et généralement*, l'ordre du contact des nouvelles surfaces avec la primitive sera de *deux* unités plus grand que celui du contact des ordonnées à leur commune origine.

Et, de plus, soit que les surfaces primitive ou dérivées, soient continues ou discontinues, les propriétés que nous venons d'indiquer ne cesseront pas d'avoir lieu dans toute leur étendue.

La première conséquence générale qu'il est possible de tirer de ces principes, c'est que, si deux surfaces ont un contact d'un ordre quelconque *suivant toute une ligne* courbe, deux sections planes faites dans les deux surfaces tangentielllement à cette courbe, ont, à leur point d'attouchement sur elle, un contact d'un ordre immédiatement supérieur.

Ainsi, par exemple, circonscrivons le cylindre à la sphère, il n'aura qu'un contact du premier ordre avec elle; or le petit cercle et l'ellipse que va tracer un plan tangent au cercle de contact des deux surfaces, cette ellipse, dis-je, et ce petit cercle auront toujours au point d'attouchement un contact du second ordre.

De là résulte encore, comme une conséquence immédiate, que sur une surface quelconque, en regardant le cercle osculateur d'une section normale, comme le grand cercle osculateur d'une sphère, les rayons des petits cercles tangens au grand au point donné, sont les rayons des sections obliques de la surface, dirigées dans le plan de ces petits cercles. Ainsi les rayons des sections obliques sont, sur le plan de ces sections, la projection du rayon de courbure des sections normales : théorème déjà connu.

L'avantage de ces diverses propriétés de l'étendue est de

pour, au moyen d'une surface unique, simple, facile à considérer, déterminer tout ce qui regarde la mesure de la courbure des surfaces les plus générales. Ainsi la sphère qui déjà vient de nous faire connaître la loi qui ramène la courbure des sections obliques à celle des sections normales; la sphère peut aussi nous conduire à la détermination des rayons des sections normales d'abord des surfaces du second degré, et, par suite, des surfaces les plus générales: puisque, comme nous l'avons démontré, ces dernières peuvent être osculées par une infinité de surfaces du second degré.

Voici comment je parviens à déterminer les rayons de courbure des surfaces du second degré pour un quelconque de leurs points. = Je conçois le plan tangent en ce point, et, par le centre, le plan diamétral qui lui est parallèle; je trace les deux axes de la section faite par ce dernier plan sur la surface; je les transporte, parallèlement à leur position primitive, du centre au point donné: cela posé;

Le grand axe est tangent à la ligne de moindre courbure qui passe par ce point.

Le petit axe est tangent à la ligne de plus grande courbure qui passe par ce point.

Ensuite une troisième proportionnelle à la distance du centre au plan tangent et au demi-grand axe, est le rayon de moindre courbure.

Une troisième proportionnelle à la distance du centre au plan tangent et au demi petit axe, est le rayon de plus grande courbure.

Enfin, si nous transportions semblablement, sur le plan tangent, un diamètre quelconque de la section diamétrale, il seroit tangent à une certaine section normale; or le rayon de cette section normale seroit encore une troisième proportionnelle à la distance du centre au plan tangent, et à la moitié de ce diamètre.

La simplicité de ces déterminations doit les rendre d'autant plus utiles aux applications de l'ingénieur et de l'artiste, qu'ici l'analyse conduit à des résultats, faciles sans doute, mais d'une complication de calculs véritablement effrayante.

Il faut maintenant transporter ces vérités aux surfaces les plus générales. Mais il convient pour cela de recourir à de nouveaux principes: ils constituent ce que j'appelle la *théorie des tangentes conjuguées*. Cette théorie et ses applications forment l'une des parties principales du travail que j'ai l'honneur de vous soumettre; et je crois devoir, avant de la faire connaître, réclamer de nouveau l'attention et l'indulgence de la Classe.

Concevons qu'une surface développable touche une surface

générale à double courbure , dans toute l'étendue d'une certaine courbe. Je me place en un point de cette courbe , et je considère 1°. la tangente à cette courbe , 2°. la droite , qui , en ce point , est l'arête de la surface développable. L'une de ces droites est déterminée de position dès que l'autre l'est ; et pour exprimer leur corrélation , quelle qu'elle soit d'ailleurs , je les appelle *tangentes conjuguées*. Nous venons donc de former un *système de tangentes conjuguées*.

A présent , concevons une seconde surface développable , pareillement circonscrite à la surface générale , mais telle , que la nouvelle courbe de contact soit tangente à la droite arête de la première développable ; alors , aussi , la droite arête de la seconde développable sera tangente à la première courbe de contact.

Ces deux droites sont donc à-la-fois et respectivement pour les deux développables et pour les deux courbes de contact , et des arêtes et des tangentes : ce qui déjà justifie leur dénomination de tangentes conjuguées.

Appliquons un moment ces considérations :

Lorsqu'une batterie rasante est placée sur une colline , la ligne magistrale , ou la direction de la batterie , est la courbe de contact d'une surface développable circonscrite au terrain de la colline , et qui va tracer en avant la ligne de démarcation des points soumis au feu de la batterie , et de ceux , au contraire , qui s'en trouvent défilés par la seule configuration de la colline. La ligne des feux , dirigée sur celle développable , et la direction de la batterie , forment précisément un système de tangentes conjuguées sur la surface de la colline : donc cette ligne de feux étant connue , pour enfileur la batterie par d'autres feux , il faudra se diriger sur la tangente conjuguée à cette ligne. Je n'offre cet exemple que pour rendre sensible mon idée , parce qu'une telle méthode ne convient qu'aux recherches du cabinet , ou bien à des opérations exécutées à loisir sur le terrain même ; mais à la guerre il faut suivre une tout autre marche. Poursuivons.

La direction donnée d'une tangente entraîne , il est vrai , la détermination de sa tangente conjuguée ; mais rien ne détermine la première tangente : si donc on suppose qu'elle prenne tour-à-tour , sur le plan tangent , toutes les directions imaginables autour du point donné , à chacune d'elles correspondra une nouvelle tangente conjuguée. En suivant cette méthode , nous allons trouver , pour un seul point de la surface primitive à double courbure , une infinité de systèmes différens de tangentes conjuguées.

Il est facile d'apercevoir que ces différens systèmes dépendent essentiellement de la forme de la surface à partir du point

donné ; ils sont des élémens secondaires de la courbure : cherchons donc la chaîne qui les rattache aux élémens mêmes de cette courbure des surfaces ; et d'abord tous les systèmes de tangentes conjuguées, appartenant au même point d'une surface, doivent être liés entr'eux par une loi unique et constante ; la voici :

Quelle que soit la forme de la surface primitive, chacun de ses points peut être regardé comme le centre d'une certaine courbe du second degré, tracée sur le plan tangent, et telle, que chacun des systèmes de tangentes conjuguées correspondant à ce point, est un des systèmes de diamètres conjugués de cette courbe, que j'appelle *indicatrice* ; parce qu'elle spécifie, parce qu'elle indique complètement la forme de la courbure des surfaces, à partir du point qui lui sert de centre.

Mais parmi tous les systèmes de diamètres conjugués, il en est un où les deux diamètres se coupent à angle droit, c'est celui des axes : le système des tangentes conjuguées représenté par ces axes, sera celui des deux tangentes aux lignes de plus grande et de moindre courbure.

Je vais maintenant, en peu de mots, exposer quelques propriétés des tangentes conjuguées et de l'indicatrice.

Les rayons des sections normales de la surface sont directement proportionnels aux quarrés des diamètres de l'indicatrice tangens à ces sections. . . . . Il suit de là, que, si l'on fait deux sections normales dirigées suivant deux tangentes conjuguées, la somme des deux rayons de courbure de ces sections sera constante et égale à la somme des rayons de courbure de la surface elle-même : c'est une équation du premier degré entre ces rayons. Dans la partie analytique de notre théorie, nous faisons un très-grand usage de cette équation, qui simplifie et les considérations et les calculs.

Mais le plus grand avantage de l'indicatrice n'est pas de conduire à quelques propriétés plus ou moins remarquables, de la courbure des surfaces ; c'est d'offrir pour tous les cas un moyen vraiment élémentaire de discuter et de déterminer cette courbure.

Suivant que l'indicatrice est une ellipse ou une hyperbole, les deux courbures de la surface sont dirigées dans le même sens ou en sens opposés ; et suivans ces deux cas, tous les rayons des sections normales sont dirigés dans le même sens, ou bien, une première série de rayons l'est dans un sens, et tous les rayons des sections conjuguées dans un sens opposé : par conséquent les deux rayons de chaque système de sections normales conjuguées, seront simultanément, dans tous les systèmes, de même signe ou de signe différent, et des-lors, ou leur somme ou leur différence constante et égale à la somme ou à la différence des

deux rayons de courbure de la surface , suivant que ces rayons principaux sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire.

Dans le premier cas, où, comme nous venons de le dire, l'indicatrice est une ellipse, si cette ellipse devient un cercle, le point qui correspond alors à l'indicatrice est un point singulier dont la considération est importante. Lorsque ces points, dont l'indicatrice est circulaire, sont isolés sur la surface, ils en sont ce qu'on appelle des *ombilics* ; lorsqu'ils forment une courbe continue, c'est la ligne des courbures égales. Nous avons cherché à développer la théorie de ces points singuliers, par une analyse qui nous a conduit à des résultats que nous croyons nouveaux.

Passons maintenant au cas où l'indicatrice est une hyperbole ; les asymptotes de cette indicatrice sont deux droites infiniment remarquables : chacune d'elles représente à elle seule un système de deux tangentes conjuguées ; chacune d'elles représente, en outre, toute une surface développable circonscrite à la surface donnée, et qui devrait la toucher tangentiellement à cette asymptote ; enfin ces deux asymptotes ont pour caractère d'avoir, avec la surface donnée, non pas un simple attouchement comme les autres tangentes, mais un contact du second ordre.

Les lignes asymptotiques, je veux dire les courbes par-tout tangentes à l'un des asymptotes de quelqu'indicatrice, ont avec les lignes de courbure des relations bien singulières : d'abord une des lignes de courbure divise en deux parties égales un des angles formés par les lignes asymptotiques ; l'autre ligne de courbure divise en deux parties égales l'angle supplémentaire de celui-là.

Par conséquent la connaissance des lignes asymptotiques conduit immédiatement, pour chaque point, à la connaissance de la direction des lignes de courbure.

Observons bien, d'ailleurs, que les lignes des deux courbures se coupent constamment à angle droit : l'angle qu'elles forment n'indique aucune relation entre les deux courbures de la surface ; mais il n'en est pas ainsi de la direction des lignes asymptotiques ; car elle fait toujours connaître immédiatement le rapport des deux rayons de courbure de la surface.

Il est égal au cube de la tangente du demi angle formé par les lignes asymptotiques. Ce résultat peut être souvent utile dans la géométrie descriptive et ses applications aux arts.

Les surfaces du second degré, qui ont leurs courbures dirigées en sens opposés, vont nous rendre sensibles ces généralités. Les surfaces de cette classe peuvent, comme on sait, être décrites de deux manières différentes par une ligne droite. Eh bien, ces deux droites génératrices qui passent ainsi par chaque point, sont les lignes asymptotiques mêmes, qui correspondent à ce point : ainsi les lignes de courbure des hyperboloïdes du second degré

coupent , partout , en deux parties égales , les angles formés par les droites des deux générations de ces hyperboloïdes. Mais il y a bien d'autres conséquences qu'on peut déduire de la considération des lignes asymptotiques , relativement à la courbure des surfaces gauches : je me contenterai d'en indiquer une seule qui prendra quelque intérêt , parce qu'elle rappellera les recherches et le nom d'un illustre géomètre.

M. Delagrange a fait connaître que les surfaces dont les deux courbures sont partout égales et dirigées en sens contraires , est toujours telle , que son aire entre une ou plusieurs courbes limites données , est un minimum. J'ajouterai maintenant que ces surfaces ont pour autre caractère géométrique , 1°. que les lignes asymptotiques forment constamment sur elles un système de trajectoires orthogonales ; 2°. que partout leurs lignes de courbure font un angle de  $50^{\circ}$ . centigrades avec les lignes asymptotiques : je me contenterai d'observer que la surface gauche de la vis rectangulaire , ou celle de l'escalier à rampe circulaire , jouissent de ces diverses propriétés ; ce qui présente un moyen facile de tracer leurs lignes de courbure , qui , dans ce cas , offrent à l'architecture une décoration aussi simple qu'élégante.

Jusqu'ici nous avons supposé que l'indicatrice dût être une ellipse ou une hyperbole ; elle pourrait être une parabole. Alors la surface n'auroit au point donné ses deux courbures ni dans le même sens , ni en sens opposés ; elle serait développable. Chaque arête rectiligne représenteroit à elle seule , pour chacun de ses points , toute une série complète de tangentes ; et toute autre tangente de la surface , tracée à partir du même point , serait nécessairement conjuguée à cette droite : enfin l'on parviendrait , par ces considérations , à toutes les propriétés des surfaces développables.

En suivant cette route , j'ai ramené la discussion générale de la courbure des surfaces , au simple examen des formes diverses qu'affectent les lignes courbes du second degré ; et ces lignes sont si simples , si faciles à considérer , que , par leur moyen , la théorie de la courbure des surfaces semble devoir cesser d'appartenir à la géométrie transcendante , et rentrer dans la partie élémentaire de l'application de l'algèbre à la géométrie.

Après être parvenu aux divers résultats que je viens d'indiquer , par des considérations purement géométriques , il a fallu les exposer par l'analyse : c'est l'objet du deuxième et du troisième mémoires.

Par des développemens tirés du théorème de Taylor , dans les fonctions à trois variables , je démontre les propriétés générales sur les contacts des surfaces dont les ordonnées éprouvent certaines variations déterminées , comme nous l'avons indiqué. Ensuite les

équations des tangentes conjuguées, et les conditions d'obliquité ou d'orthogonalité de ces tangentes, m'ont donné d'abord leurs propriétés communes, en second lieu celles particulières aux lignes de courbures; et par quelques artifices d'analyse, je suis retombé sur les équations données par M. Monge; je l'ai fait, afin qu'on vit l'identité de ses conséquences avec les miennes, et que celles-ci, de la sorte, acquissent une confiance si méritée par les belles recherches de ce géomètre, dont je m'honorerai toujours d'avoir été et d'être encore l'élève.

Je ne puis entrer dans le détail des opérations analytiques nécessaires pour arriver aux principes que nous avons exposés jusqu'ici. Nous avons cherché, autant que nous avons pu, à suivre, quoique de loin, la marche que les mathématiciens modernes nous ont tracée, et qui donne à leurs productions un caractère de facilité et d'élégance qui fera vivre leurs méthodes autant que les grandes vérités qu'elles nous ont fait connaître.

Je me contenterai de dire qu'après avoir déterminé les caractères analytiques propres à chaque genre de courbure des surfaces, à partir d'un point donné, je suis parvenu aux équations mêmes des familles des surfaces qui, dans chacun de leurs points, présentent une courbure douée d'un seul et même caractère.

Tels sont les objets traités dans les trois premiers mémoires de l'ouvrage que j'ai l'honneur de soumettre à l'examen de la Classe. Si cet examen ne lui laisse point à penser que la suite de mes recherches ne mérite pas de lui être présentée, enhardi par cette indulgence, je produirai la suite des résultats auxquels je crois être parvenu, et les applications que j'ai tenté d'en faire aux méthodes de la Géométrie descriptive, à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, et à l'optique.

Ces applications, si je ne me trompe, feront entrevoir que les généralités qui les précèdent, ne sont pas seulement des spéculations oiseuses; mais qu'elles pourroient devenir d'un intérêt immédiat, si, saisies par des mains plus exercées, leurs conséquences étoient portées dans les objets d'une utilité générale.

Conformément aux conclusions du rapport de MM. Carnot, Monge, et de M. Poisson rapporteur, ces mémoires ont été jugés dignes de l'approbation de la première Classe de l'Institut. Nous proposerions, disent les commissaires de la classe dans leur rapport, d'insérer ces mémoires dans le *Recueil des Savans étrangers*, si l'auteur ne les avoit destinés à un autre usage.

Ils composent la première section d'un ouvrage ayant pour titre : *Développemens de Géométrie, etc.*, qui s'imprime actuellement. Il paroîtra en mai 1813, 1 vol. in-4°.

## GNOMONIQUE ANALYTIQUE,

Par M. PUISSANT.

*Définitions.*

Si on conçoit une tige de fer droite, dirigée parallèlement à l'axe du monde, et scellée dans un mur, du côté où l'une de ses faces planes est éclairée par le soleil, l'ombre de la tige entière représentera sur ce mur la trace d'un méridien céleste passant par le centre du soleil; et l'ombre de l'extrémité antérieure de la tige parcourra, dans le même jour, une courbe qui sera la trace d'un cône droit, dont la génératrice fait avec la tige un angle égal au complément de la déclinaison de l'astre. L'objet de la gnomonique est d'indiquer l'heure et le jour de ces deux phénomènes.

Vu l'énorme distance à laquelle le soleil se trouve de nous, il est permis de supposer que la tige ou l'axe du cadran solaire se confond avec celui de rotation de la terre; et à cause de la lenteur du mouvement de l'astre dans l'écliptique, il est permis en outre de supposer sa déclinaison constante pendant sa présence sur l'horizon.

Le *centre du cadran* est le point où son axe, réduit par la pensée à une ligne mathématique, le rencontre. Ce point peut être pris en même temps pour le centre de la terre.

La trace du méridien du lieu sur le cadran se nomme *la méridienne*, parce que c'est sur cette ligne que tombe précisément l'ombre de l'axe à midi vrai.

La projection de l'axe ou du *style* sur le cadran s'appelle *la soustylaire*; cette ligne est donc la trace même d'un méridien perpendiculaire au plan du cadran. En général, la trace d'un méridien se nomme une *ligne horaire*.

On dit qu'un cadran vertical *décline*, lorsqu'il n'est point perpendiculaire au méridien du lieu.

Quoique toutes les questions de gnomonique se résolvent facilement et avec élégance par les procédés de la géométrie des-

criptive, il est cependant nécessaire de faire usage du calcul; lorsqu'on veut tracer les lignes d'un cadran solaire avec toute la précision possible. J'ai seulement pour but, dans ce petit mémoire, de résoudre par l'analyse ce problème général:

*Déterminer les lignes horaires et les courbes de déclinaison sur un cadran vertical déclinant, connaissant la longueur de l'axe, la méridienne et la déclinaison du cadran, ainsi que la latitude du lieu (1).*

#### *Détermination des lignes horaires.*

Rapportons les points de l'espace à des coordonnées rectangulaires, et prenons à cet effet, pour axe des  $x$ , l'intersection du méridien du lieu avec l'horizon, pour axe des  $y$  la trace du premier vertical sur ce dernier plan, et par conséquent pour axe des  $z$  la verticale du lieu du cadran.

L'origine des coordonnées pouvant être considérée comme le centre de la terre ou de la sphère céleste, la droite qui joint ce point et le pôle du monde sera toute entière dans le plan des  $xz$ , et fera, avec l'axe des  $x$ , un angle  $\lambda$  égal à la latitude du lieu ou à la hauteur du pôle; de sorte que dans l'équation

$$z = Ax + By,$$

qui est celle du plan d'un méridien quelconque, on aura

$$A = \text{tang. } \lambda.$$

Quant au coefficient  $B$ , il dépend visiblement de l'angle que ce méridien fait avec le plan des  $xz$ , c'est-à-dire de l'angle horaire  $p$  réduit en degrés, à raison de 1 heure pour 15°. Or, on sait que

$$\cos p = \frac{-B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \quad \text{donc} \quad \cos^2 p = \frac{B^2}{\sec^2 \lambda + B^2},$$

$$\text{et par conséquent} \quad B = \frac{\cot p}{\cos \lambda}.$$

---

(1) Voyez, pour la détermination de ces éléments, les traités de Gnomonique, et le *Journal de l'École Polytechnique*, tom. IV, pag. 261.

Il suit de là que l'équation du plan d'un cercle horaire est

$$z = x \operatorname{tang} \lambda + y \frac{\cot p}{\cos \lambda}; \quad (1)$$

En faisant successivement  $x$  et  $z$  nulles, on aura les traces verticales et horizontales de ces cercles; et si on prend positivement l'angle horaire  $p$  après midi, les lignes horaires seront toutes dirigées vers l'est: le contraire aura lieu en considérant  $p$  comme négatif; et pour lors, dans l'un comme dans l'autre cas, les  $x$  positives se compteront du sud au nord, les  $y$  positives de l'ouest à l'est, et les  $z$  positives de haut en bas.

Maintenant soit pris pour cadran le plan même des  $yz$ , c'est-à-dire, le plan vertical non déclinant: on aura pour l'équation des lignes horaires

$$z = y \frac{\cot p}{\cos \lambda}; \quad (2)$$

et si  $H$  désigne l'angle qu'une de ces lignes fait avec l'axe des  $z$  ou la méridienne, on aura par conséquent

$$\operatorname{tang} H = \frac{y}{z} = \cos \lambda \operatorname{tang} p,$$

ou, désignant par  $i$  l'inclinaison de l'axe ou du style sur le cadran, on aura, à cause de  $i = 90^\circ - \lambda$ ,

$$\operatorname{tang} H = \sin i \operatorname{tang} p; \quad (3)$$

équation qui a lieu pour le cadran horizontal comme pour le cadran vertical régulier; mais dans le cas du premier cadran, on a nécessairement  $i = \lambda$ .

Pour résoudre le problème que nous avons principalement en vue, soit  $\theta$  la déclinaison du cadran, comptée de l'ouest au nord, à partir de l'axe des  $y$ ; et afin de prendre les coordonnées des points des lignes horaires dans le plan même du cadran, ce qui est beaucoup plus commode pour les constructions, employons les formules connues pour passer d'un système de coordonnées rectangles à un autre système de même nature, savoir,

$$x = y' \sin \theta + x' \cos \theta,$$

$$y = y' \cos \theta - x' \sin \theta,$$

$$z = z';$$

alors l'équation (1), rapportée aux nouvelles coordonnées, deviendra

$$\left. \begin{aligned} z' \cos \lambda &= x' \sin \lambda \cos \theta + y' \sin \lambda \sin \theta \\ &- x' \cot p \sin \theta + y' \cot p \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De là l'équation des lignes horaires, sur le plan vertical déclinant  $y' z'$ , est

$$z' \cos \lambda = y' (\sin \lambda \sin \theta + \cot p \cos \theta); \quad (5)$$

ainsi appelant toujours  $H$  l'angle d'une de ces lignes avec la méridienne, on a

$$\cot H = \tan \lambda \sin \theta + \frac{\cot p \cos \theta}{\cos \lambda}; \quad (6)$$

Cette formule, qui est une de celles de la trigonométrie sphérique, se calcule plus commodément par les logarithmes, en décomposant le second membre en facteurs; mais pour rendre cette décomposition possible, soit un angle auxiliaire  $\phi$ , tel qu'on ait

$$\cot H = K \cos (\theta - \phi),$$

$K$  étant de plus un coefficient inconnu dont on déterminera la valeur ainsi qu'il suit :

D'abord on a, en développant,

$$\cot H = K \sin \phi \sin \theta + K \cos \phi \cos \theta,$$

ensuite, si on égale terme à terme cette valeur de  $\cot H$  avec la précédente, on aura

$$K \sin \phi = \tan \lambda, \quad K \cos \phi = \frac{\cot p}{\cos \lambda},$$

partant

$$K = \frac{\tan \lambda}{\sin \phi}, \quad \tan \phi = \sin \lambda \tan p \quad (7)$$

et enfin

$$\cot H = \frac{\tan \lambda}{\sin \phi} \cos (\theta - \phi) \quad (8)$$

La valeur de  $\tan \phi$ , qui est analogue à celle (3), fait voir, comme les considérations géométriques, que le cadran irrégulier et le cadran horizontal peuvent se déduire réciproquement l'un de l'autre.

Il est utile de connoître l'angle que la soustylaïre fait avec la méridienne du plan du cadran, ainsi qu'on le verra bientôt.

Pour trouver cet angle, soit  $V$  celui qu'un cercle horaire fait en général avec le cadran; on aura

$$\cos V = \frac{-M}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}},$$

en représentant généralement par  $z' = Mx' + Ny'$ , l'équation (4) du plan de ce cercle, et auquel cas

$$M = \operatorname{tang} \lambda \cos \theta - \frac{\cot p \sin \theta}{\cos \lambda},$$

$$N = \operatorname{tang} \lambda \sin \theta + \frac{\cot p \cos \theta}{\cos \lambda}.$$

Mais pour particulariser le cercle que nous considérons, soit  $V = 90^\circ$ , ou  $\cos V = 0$ ; alors on aura  $-M = 0$ , d'où l'on tire, en désignant par  $p'$  la valeur actuelle de  $p$ ,

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\sin \lambda}{\cot p'}. \quad (9)$$

Telle est la relation qui doit exister entre les angles  $\theta$ ,  $\lambda$  et  $p'$ , pour que le cercle horaire fasse un angle  $p'$  avec le méridien du lieu, soit perpendiculaire au cadran. Mais, par ce qui précède, la tangente de l'angle d'une ligne horaire avec la méridienne du cadran, est, en général,

$$\operatorname{tang} H = \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda \sin \theta + \cot p \cos \theta},$$

donc celle de l'angle  $H'$  de la soustylaire avec cette même méridienne sera, à cause de la relation précédente,

$$\operatorname{tang} H' = \cot \lambda \sin \theta. \quad (10)$$

Cet angle  $H'$  est nécessairement nul en même-temps que  $\theta$ ; ainsi, lorsque le cadran est vertical non déclinant, la soustylaire et la méridienne se confondent; ce qui est d'ailleurs de toute évidence.

Supposons maintenant qu'un certain nombre de méridiens soient placés symétriquement de part et d'autre du plan déterminé par l'axe du cadran et sa projection ou la soustylaire: dans ce cas, leurs traces sur le cadran seront de même disposées symétriquement à droite et à gauche de cette soustylaire; si donc l'on prenoit pour axe des coordonnées, cette ligne et une droite qui lui fût perpendiculaire, et qui se trouvât toujours sur le cadran, les traces ou lignes horaires dont il est question, se

détermineroient par la même formule relative au cadran vertical non déclinant ; seulement il faudroit substituer pour  $\lambda$  le complément de l'angle  $i$  que l'axe fait avec la soustylaire, et pour  $p$  l'inclinaison  $\pi$  d'un cerclé horaire sur le plan de l'axe et de la soustylaire, ce qui est assez évident. Or, l'heure à laquelle le centre du soleil se trouve dans ce plan est, par ce qui précède, donné par la formule  $\cot p' = \frac{\sin \lambda}{\tan \theta}$ , puisque  $p'$  est l'angle horaire compté à partir du méridien du lieu.

Désignant donc par  $P$  un autre angle horaire supposé plus grand que  $p'$ , on aura  $\pi = P - p'$ ; et l'équation (3) en y changeant  $H$  en  $h$ , afin d'indiquer que l'angle  $h$  se compte maintenant de la soustylaire, deviendra alors,

$$\left. \begin{array}{l} \tan h = \sin i \tan \pi = \sin i \tan (P - p') \\ \text{ou} \quad \tan (H - H') = \sin i \tan (P - p'). \end{array} \right\} \quad (11)$$

Ce dernier procédé, qui pourra être employé pour déterminer les directions des lignes horaires sur le cadran vertical déclinant, sera plus simple que celui qui dérive de l'emploi de la valeur ci-dessus de  $\cot H$ .

Si on vouloit avoir l'angle  $i$  en fonction de la déclinaison  $\lambda$  du cadran et de la hauteur  $\lambda$  du pôle, cela seroit très-facile : en effet, on remarquera que l'équation du plan  $y'x'$  du cadran, par rapport aux coordonnées primitives, est

$$x = y \tan \theta$$

et que les équations de l'axe sont

$$x = z \cot \lambda, \quad y = 0;$$

puis, si on se rappelle que quand

$$x = az, \quad y = bz$$

sont les équations d'une droite, et que

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est celle d'un plan, le sinus de l'angle  $i$  de cette droite avec le plan est

$$\sin i = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

On en conclura pour le cas actuel, et à cause de

$$b = 0, a = \cot \lambda, A = 1, B = -\tan \theta, C = 0,$$

que

$$\sin i = \frac{\cot \lambda}{\sqrt{1 + \cot^2 \lambda} \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\cos \lambda}{\sec \theta} = \cos \lambda \cos \theta; \quad (12)$$

résultat qui se déduit d'ailleurs immédiatement de la trigonométrie sphérique, ainsi que tous ceux qui précèdent. On trouveroit de la même manière l'inclinaison  $\xi$  de l'axe sur une ligne horaire, supposant que l'on connût les angles  $i$  et  $h$ ; et il n'est pas difficile de voir que l'on auroit

$$\cos \xi = \cos i \cos h = \cos i \cos (H - H') \quad (13)$$

#### *Détermination des Courbes diurnes.*

L'équation d'une courbe diurne, c'est-à-dire, de celle que trace sur le cadran l'ombre de l'extrémité de l'axe, ou un faisceau de lumière passant par une petite ouverture circulaire pratiquée au milieu d'une plaque qui tient souvent lieu d'axe, se détermine comme il suit :

Soit  $r$  la longueur de l'axe, prise en même temps pour celle du rayon d'une sphère concentrique à la sphère céleste; et supposons pour un moment que le centre de cette petite sphère soit l'extrémité antérieure de cet axe. Supposons, de plus, que la déclinaison  $\delta$  du soleil soit boréale, ou, ce qui est de même, que la latitude du parallèle décrit par cet astre en vingt-quatre heures, soit  $+\delta$ . Comme le plan de ce parallèle est perpendiculaire à celui des  $xz$ , son équation sera généralement

$$z = A'x + D',$$

et à cause que  $A'$  est, dans ce cas, la tangente de l'angle qu'il fait avec le plan des  $xy$ , on a

$$A' = -\cot \lambda;$$

D'ailleurs, la plus courte distance de l'origine des coordonnées au plan de ce même parallèle, étant égale d'une part à  $r \sin \delta$ , et d'autre part à  $\frac{D'}{\sqrt{1 + A'^2}}$ , il s'ensuit que l'on a

$$r \sin \delta = \frac{D'}{\operatorname{cosec} \lambda} \quad \text{et} \quad D' = \frac{r \sin \delta}{\sin \lambda},$$

et par conséquent

$$z = -x \cot \lambda + \frac{r \sin \delta}{\sin \lambda}. \quad (14)$$

Actuellement, il s'agit de trouver l'équation de la surface conique engendrée par le rayon lumineux qui décrit la courbe de déclinaison sur le plan. Or, les projections verticales de ce rayon sont en général

$$x = mz, \quad y = nz$$

l'équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et celle du plan d'un parallèle à l'équateur,

$$z = A'x + D';$$

par conséquent, si on suppose que ces quatre équations aient lieu en même temps, on trouvera, en les combinant entr'elles, que l'équation de la surface conique cherchée est

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 (z - A'x)^2}{D'^2},$$

et si on fait  $x$  constante et égale à  $\alpha$ , l'équation résultante

$$\alpha^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 (z - A'\alpha)^2}{D'^2}$$

sera celle de la trace du cône sur un plan vertical parallèle à l'axe des  $y$ , et par conséquent non déclinant. Substituant pour  $A'$  et  $D'$  leurs valeurs précédentes, et faisant attention que  $\alpha = r \cos \lambda$ , on aura, après les opérations nécessaires, et avoir fait  $z$  négative, afin de se conformer à l'hypothèse faite sur la déclinaison  $\delta$  du soleil,

$$z^2 (\sin^2 \delta - \sin^2 \lambda) + 2rz \cos^2 \lambda \sin \lambda + y^2 \sin^2 \delta = r^2 \cos^2 \lambda (\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta).$$

Cette équation devient plus simple, quand on place l'origine des  $z$  à la racine même de l'axe du cadran, comme on l'a fait précédemment, et alors on a  $z = z' - r \sin \lambda$ ; par suite

$$z'^2 (\cos^2 i - \sin^2 \delta) - 2rz' \cos i \cos^2 \delta - y^2 \sin^2 \delta + r^2 \cos^2 \delta = 0, \quad (15)$$

à cause de  $i = 90^\circ - \lambda$ .

Il suit de là que la courbe diurne ou de déclinaison est une hyperbole ou une ellipse, selon que le complément de l'incli-

naison de l'axe sur le cadran est plus grand ou plus petit que la déclinaison du soleil ; elle est, au contraire, une parabole, si  $\cos i = \sin \delta$ .

Lorsque  $\delta = 0$ , l'équation précédente se réduit à

$$z' = \frac{r}{\cos i}, \quad (16)$$

ce qui signifie que l'*équinoxiale* du cadran est une droite perpendiculaire à la soustylaie ; et en effet, le plan de l'équateur dans lequel se trouve alors le soleil, étant perpendiculaire à l'axe du monde, la trace de ce plan sur le cadran doit être aussi perpendiculaire à la projection de l'axe.

Il est remarquable que l'équation ci-dessus de la courbe diurne, et même celles (11) et (13), conviennent parfaitement à un cadran situé d'une manière quelconque, à l'égard des plans coordonnés primitifs ; pourvu que, sans changer l'origine des coordonnées, l'on prenne pour axe des  $z'$  la soustylaie, et pour axe des  $y'$  une perpendiculaire à cette ligne, située dans le plan du cadran. Dionis-du-Séjour, en résolvant les mêmes questions à la fin du premier volume de son *Traité analytique du Mouvement apparent des Corps célestes*, mais par une analyse toute différente de celle qui précède, n'a pas manqué de choisir ce système de coordonnées, parce que les formules pour calculer les parties d'un cadran solaire sont, par ce moyen, aussi simples qu'il est possible de le désirer.

Pour compléter la théorie actuelle, j'observerai que l'on détermine très-facilement les points où les courbes de déclinaison coupent les lignes horaires, en calculant les distances de ces points au centre du cadran, à l'aide des angles  $\delta$ ,  $\xi$ , et de la longueur  $r$  de l'axe ; car soit  $r'$  une de ces distances, on aura, par la propriété du triangle rectiligne,

$$r' = \frac{r \cos \delta}{\cos (\delta + \xi)}, \quad (17)$$

dans la supposition que la déclinaison du soleil est boréale : on écrirait au dénominateur,  $\cos (\xi - \delta)$  au lieu de  $\cos (\xi + \delta)$ , si la déclinaison étoit australe.

Les points de la *méridienne du temps moyen* se déterminent par la même méthode ; on cherche la ligne horaire correspondante à *midi moyen* pour un jour proposé, puis l'on obtient par la formule (17) la valeur de  $r'$ , en faisant usage de la déclinaison du soleil pour ce jour-là.

*Exemple numérique.*

Le cadran solaire exécuté au Dépôt général de la guerre, dont la latitude  $\lambda = 48^{\circ}51'37''$ , décline vers l'ouest d'une quantité angulaire  $\theta = 29^{\circ}23' \frac{4}{10}$ , et la longueur de l'axe  $r = 1^m,4915$ ; trouver la ligne horaire de 1 heure, et le point où la courbe de déclinaison du soleil coupe cette ligne, lorsque cette déclinaison est boréale et égale à  $\delta = 14^{\circ}29'20''$ .

D'abord l'angle horaire.....  $P$  ou  $p = 15^{\circ}$ .

Ensuite de l'équation (9) on déduit  $p' = 36^{\circ}.47'50''$ .

Avec celle (10) on obtient.....  $H' = 23^{\circ}.12'25''$ .

L'équation (12) donne.....  $i = 34^{\circ}.58'30''$ .

Celle (11).....  $H - H' = -12^{\circ}.54'40''$ .

Ainsi l'angle de la ligne horaire de 1 heure avec la méridienne du cadran, est.....  $H = 10^{\circ}.17'45''$ .

L'équation (13) donne.....  $\xi = 36^{\circ}.59'40''$ .

Enfin celle (17).....  $r' = 2^m,3189$ .

Les quantités  $p'$ ,  $H'$ ,  $i$  étant constantes pour le même cadran, il ne s'agira par conséquent que de recourir aux formules (11), (13) et (17), pour déterminer tout autre point d'intersection.

---

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

Par M. PUISSANT.

---

*Problème.*

Soient quatre droites  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\epsilon$ , partant d'un même point  $S$  de l'espace, et supposons que les trois premières,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , forment un angle trièdre; on demande la relation qui existe entre les angles que la quatrième droite  $\epsilon$  fait avec chacune des trois autres.

*Solution.*

Si, par un point quelconque de la droite  $\epsilon$ , autre que  $S$ , on mène un plan perpendiculaire à cette droite, ce plan coupera les trois autres droites  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , en des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , qui pourront être considérés comme les sommets des angles de la base

d'une pyramide triangulaire  $SABC$ ; et, en vertu d'une propriété connue des polyèdres, le carré de la face  $ABC$  sera égal à la somme des carrés des trois autres faces, moins deux fois la somme des produits de ces autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent. (Voyez la *Géométrie de position*; ou mon *Recueil de propositions de géométrie*, pag. 225, 2<sup>e</sup>. édition) (\*).

(\*) *Théorème*. Soient  $M, N, P, Q$ , les aires des quatre triangles, faces d'une pyramide triangulaire;  $m, n, p$ , les angles des faces de cette pyramide dans l'ordre suivant :  $m$  angle des faces  $N$  et  $P$ ;  $n$  angle des deux faces  $M$  et  $P$ ;  $p$  angle des deux faces  $M$  et  $N$ ; soient enfin  $\alpha, \beta, \gamma$ , les angles du plan de la face  $Q$  avec les plans des trois autres faces  $M, N, P$ , on aura l'équation suivante :

$$(A) \quad Q^2 = M^2 + N^2 + P^2 - 2NP \cos m - 2PM \cos n - 2MN \cos p.$$

*Démonstration.*

Une aire quelconque plane et sa projection sur un plan, sont dans le rapport du rayon au cosinus de l'angle formé par le plan de l'aire et par le plan sur lequel on la projette. D'où il suit qu'en projetant trois quelconques des quatre faces  $M, N, P, Q$ , sur le plan de l'une d'elles, par exemple sur le plan de la face  $M$ , les trois projections seront  $N \cos p, P \cos n, Q \cos \alpha$ . Or, la face  $M$ , est égale à la somme de ces trois projections; donc on a l'équation

$$(1) \quad M = N \cos p + P \cos n + Q \cos \alpha.$$

Projetant successivement la pyramide entière sur ses trois faces  $N, P, Q$ , on conclura :

$$(2) \quad N = M \cos p + P \cos m + Q \cos \beta.$$

$$(3) \quad P = M \cos n + N \cos m + Q \cos \gamma.$$

$$(4) \quad Q = M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma.$$

Substituant dans l'équation (4) pour  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , leurs valeurs tirées des équations (1), (2), (3), on aura, en ajoutant les termes semblables, l'équation (A).

Cette démonstration s'applique à un polyèdre quelconque dont on connoît les faces, et les angles de l'une quelconque de ces faces avec toutes les autres, ainsi que M. Carnot l'a fait voir dans sa *Géométrie de position*, pag. 310.

H. C.

Cela posé, désignons par  $(\epsilon, a)$  l'angle que la droite  $\epsilon$  fait avec l'arête  $a$  de la pyramide; par  $(\epsilon, ab)$  celui de cette même droite avec le plan des arêtes  $ab$ ; par  $(ab, ac)$  l'angle dièdre des deux faces qui ont  $a$  pour arête commune, et ainsi de suite; enfin, appelons  $\sigma$  l'aire de la base  $ABC$ , et faisons attention que l'aire de tout triangle rectiligne est égale à la moitié du produit de deux de ses côtés, multiplié par le sinus de l'angle compris, nous aurons, conformément à la propriété citée,

$$\begin{aligned}\sigma^2 = & \frac{a^2 b^2}{4} \sin^2(a, b) + \frac{a^2 c^2}{4} \sin^2(a, c) + \frac{b^2 c^2}{4} \sin^2(b, c) \\ & - 2 \frac{ab \cdot ac}{4} \sin(a, b) \sin(a, c) \cos(ab, ac) \\ & - 2 \frac{ab \cdot bc}{4} \sin(a, b) \sin(b, c) \cos(ab, bc) \\ & - 2 \frac{ac \cdot bc}{4} \sin(a, c) \sin(b, c) \cos(ac, bc).\end{aligned}$$

Soit  $V$  le volume de la pyramide  $SABC$ , dont  $\epsilon$  est la hauteur; on a évidemment

$$\frac{3V}{\epsilon} = \sigma.$$

Soient de plus  $\alpha, \beta, \gamma$ , les longueurs des perpendiculaires abaissées des points  $A, B, C$ , sur les faces opposées; on a pareillement

$$\frac{3V}{\alpha} = \frac{bc}{2} \sin(b, c);$$

$$\frac{3V}{\beta} = \frac{ac}{2} \sin(a, c);$$

$$\frac{3V}{\gamma} = \frac{ab}{2} \sin(a, b);$$

à l'aide de ces valeurs, la relation précédente deviendra, après avoir effacé le facteur  $3V$  commun à tous les termes,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon^2} = & \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \\ & - \frac{2}{\alpha\beta} \cos(ac, bc) - \frac{2}{\alpha\gamma} \cos(ab, bc) - \frac{2}{\beta\gamma} \cos(ab, ac).\end{aligned}$$

Mais parce que la hauteur d'une pyramide et l'une des arêtes

Le son sommet sont la hauteur et l'hypothénuse d'un triangle rectangle, il s'ensuit que l'on a

$$\xi = a \cos(\xi, a); \quad \eta = b \cos(\xi, b); \quad \zeta = c \cos(\xi, c);$$

par la même raison

$$\alpha = a \sin(a, bc); \quad \beta = b \sin(b, ac); \quad \gamma = c \sin(c, ab);$$

Introduisant ces valeurs dans le résultat précédent, il viendra, après avoir chassé le dénominateur  $\xi^2$ , et réduit,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\cos^2(\xi, a)}{\sin^2(a, bc)} + \frac{\cos^2(\xi, b)}{\sin^2(b, ac)} + \frac{\cos^2(\xi, c)}{\sin^2(c, ab)} \\ &- 2 \frac{\cos(\xi, a) \cos(\xi, b)}{\sin(a, bc) \sin(b, ac)} \cos(ac, bc) \\ &- 2 \frac{\cos(\xi, a) \cos(\xi, c)}{\sin(a, bc) \sin(c, ab)} \cos(ab, bc) \\ &- 2 \frac{\cos(\xi, b) \cos(\xi, c)}{\sin(b, ac) \sin(c, ab)} \cos(ab, ac); \end{aligned}$$

et pour abréger,

$$E = 0.$$

Telle est la relation qu'il falloit trouver : cette relation, très-remarquable, fait partie de celles que M. Français a publiées dans le premier volume de cette Correspondance, page 343; je la rappelle ici, afin de faire connaître le moyen simple et direct de l'obtenir. On peut voir par la lettre insérée dans les *Annales de Mathématiques* (novembre 1812), l'usage que M. Français en fait pour résoudre analytiquement ce problème : *Déterminer une sphère qui touche quatre sphères données* (1).

Extrait de la lettre citée, de M. Français à M. Gergonne.

Metz, 2 octobre 1812.

En éliminant de cette équation  $E = 0$  de l'article précédent, deux des trois quantités  $\cos(\rho, a)$ ,  $\cos(\rho, b)$ ,  $\cos(\rho, c)$ , des équations (5) de la page 64, deuxième volume de cette

(1) Voyez la solution analytique de ce problème, par M. Poisson, septembre 1812, *Bulletin de la Société Philomatique*.

Correspondance, la troisième sera donnée par une équation du second degré, et les deux autres seront données ensuite par les mêmes équations (5). Il ne restera donc plus à déterminer que la valeur de  $p$ , qui sera fournie par une quelconque des équations (4) du premier degré de la page citée 64, 2<sup>e</sup>. vol. *Voyez*, même page, les équations (1) et (2).

On trouve deux solutions pour la position de  $p$ , parce que les équations (2) sont les mêmes, aux signes près, soit qu'on prenne tous les signes supérieurs dans les équations (1), soit qu'on y prenne tous les signes inférieurs. Mais comme nous n'avons employé que les carrés des équations (2), qui comprennent l'un et l'autre signes, il s'ensuit que nous avons dû obtenir la solution des deux cas.

*Remarque sur une classe particulière d'équations aux différences partielles à trois variables.*

Par M. POISSON.

Je désignerai les variables par  $x, y, z$ , et je ferai pour abréger

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dydx} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

Les équations que je veux considérer seront comprises sous cette forme :

$$P = (rt - s^2)^{\alpha} Q;$$

l'exposant  $\alpha$  est supposé positif;  $Q$  désigne une fonction quelconque de  $x, y, z$ , qui renferme en outre les différences partielles de  $z$ , de tel ordre que l'on voudra, et qui n'est assujétie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie lorsque la quantité  $rt - s^2$  devient nulle; enfin  $P$  représente une fonction des cinq quantités  $p, q, r, s, t$ , homogène par rapport aux trois dernières.

Cela posé, on satisfera toujours à une semblable équation en prenant pour  $q$  une certaine fonction de  $p$ . En effet, soit

$$q = fp;$$

on aura en différenciant successivement, par rapport à  $x$  et  $y$ ,

$$s = r.f'p, \quad t = s.f'p = r.(fp)';$$

ces valeurs de  $s$  et de  $t$  donnent  $rt - s^2 = 0$ ; elles rendront

donc nul le second nombre de l'équation proposée; et en les substituant dans la fonction  $P$ , il résulte de sa forme homogène, qu'une même puissance de  $r$  sera facteur commun à tous les termes de cette fonction; divisant donc par cette puissance, l'équation ne contiendra plus que  $p$ ,  $f'p$  et  $f''p$ : ce sera une équation différentielle ordinaire; en l'intégrant, elle déterminera la forme de  $f'p$ , et cette fonction contiendra une constante arbitraire.

L'équation  $q = f'p$ , aux différences partielles du premier ordre peut toujours s'intégrer sous forme finie, par les procédés connus; outre la constante que cette équation contient déjà, son intégrale renfermera encore une fonction arbitraire; et cette intégrale satisfera à l'équation proposée. Donc une équation du second ordre ou d'un ordre plus élevé, de la forme de celles que nous considérons, a toujours, sous forme finie, une intégrale particulière en  $x, y, z$ , contenant une constante et une fonction arbitraires. Dans le plus grand nombre de cas, l'intégrale générale de l'équation proposée ne pourra pas s'obtenir; et alors il sera utile d'en avoir l'intégrale particulière que nous indiquons, indépendamment de l'intégrale générale. Appliquons cette remarque à des exemples particuliers.

#### EXEMPLE 1<sup>er</sup>.

Soit proposée l'équation

$$t + 2ps + (p^2 - a^2)r = 0, \quad (1)$$

dans laquelle  $a^2$  représente une constante positive. Cette équation est celle qui renferme les lois rigoureuses de la propagation du son dans un canal cylindrique horizontal, lorsque les vibrations de l'air ne sont pas traitées comme infiniment petites, et que la température est supposée constante.

Je substitue les valeurs précédentes de  $s$  et de  $t$ , savoir :

$$s = r \cdot f'p, \quad t = r \cdot (f'p)^2,$$

dans cette équation; elle devient

$$[(f'p)^2 + 2pf'p + p^2 - a^2]r = 0,$$

ou bien, en supprimant le facteur  $r$ , multipliant tous les termes par  $dp^2$ , et mettant  $dq$  à la place de  $f'p \cdot dp$ ,

$$dq^2 + 2pdpdq + (p^2 - a^2)dp^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$dq = -(p \pm a) dp,$$

et en intégrant et désignant par  $c$ , la constante arbitraire,

$$q + \frac{1}{2} p^2 + ap = c: \quad (2)$$

le double signe  $\pm$  est inutile devant le terme  $ap$ , parce que le carré  $a^2$  étant seul donné, le signe de  $a$  est indéterminé.

Toute équation en  $p$  et  $q$  appartient, comme on sait, à une surface développable, et s'intègre en  $y$  satisfaisant au moyen de l'équation d'un plan dont on fait ensuite varier les constantes arbitraires. Soit donc

$$z = ax + cy + \gamma;$$

$a, c, \gamma$  étant regardées comme des constantes, on aura  $p = a$ ,  $y = c$ , et, en vertu de l'équation (2),

$$c = c - aa - \frac{a^2}{2};$$

par conséquent, cette équation aura pour intégrale particulière

$$z = ax + \left( c - aa - \frac{a^2}{2} \right) y + \gamma.$$

Pour en déduire son intégrale générale, il faut, d'après le procédé connu, prendre pour  $\gamma$  une fonction arbitraire de  $a$ , et ensuite joindre à l'équation du plan, sa différentielle prise par rapport à  $a$ : le système de ces deux équations représentera l'intégrale générale de l'équation (2). Faisant donc  $\gamma = \phi a$ , ces équations seront

$$z = ax + \left( c - aa - \frac{a^2}{2} \right) y + \phi a,$$

$$0 = x - (a + a) y + \phi' a.$$

Elles satisfont à l'équation (2) comme intégrale générale, et à l'équation (1) comme intégrale particulière. A cause que le signe de  $a$  est indéterminé, cette intégrale de l'équation (1) équivaut réellement à deux: la seconde intégrale sera donnée par ce système d'équations,

$$z = ax + \left( b + aa - \frac{a^2}{2} \right) y + \psi a,$$

$$0 = x + (a - a) y + \psi' a;$$

$b$  et  $\psi a$  étant la constante et la fonction arbitraires.

Dans le *Mémoire sur la Théorie du Son*, qui fait partie du quatorzième cahier du Journal de notre Ecole, j'ai donné (page 367), sous une forme différente et moins simple, des intégrales particulières de l'équation (1), qui reviennent à celles que nous venons de trouver.

## E X E M P L E I I°.

Considérons l'équation

$$(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0, \quad (1)$$

qui appartient à la surface dont les deux courbures en chaque point sont égales et tournées en sens contraires. En y faisant  $s = r f' p$ ,  $t = r (f' p)^2$ , elle devient

$$[1 + q^2 - 2pq \cdot f' p + (1 + p^2) (f' p)^2] r = 0;$$

si l'on supprime le facteur  $r$ , et que l'on multiplie tous les termes par  $dp^2$ , on a cette équation différentielle,

$$(1 + q^2) dp^2 - 2pq dp dq + (1 + p^2) dq^2 = 0. \quad (2)$$

Pour l'intégrer, je la différencie d'abord en prenant la différentielle  $dp$  constante, ce qui donne  $d^2y = 0$ ; on aura donc

$$dq = adp, \quad q = ap + b;$$

$a$  et  $b$  étant deux constantes dont une seule doit rester arbitraire. En effet, en substituant ces valeurs de  $q$  et  $dq$ , dans l'équation (2), on trouve, toute réduction faite,

$$1 + b^2 + a^2 = 0, \quad \text{ou} \quad b = \sqrt{-1 - a^2};$$

l'intégrale de cette équation est donc

$$q = ap + \sqrt{-1 - a^2}; \quad (3)$$

et cette valeur de  $q$  satisfait à l'équation (1), comme intégrale particulière.

L'équation (3) est facile à intégrer par les méthodes connues;  $\phi$  désignant la fonction arbitraire, on trouve pour son intégrale,

$$x = \phi(x + ay) + y \sqrt{-1 - a^2}, \quad (4)$$

laquelle doit aussi satisfaire à l'équation (1), comme il est aisé de le vérifier.

Cette intégrale contient l'équation du plan, comme cas parti-

culier ; car si l'on prend

$$\phi(x + ay) = a(x + ay) + \gamma,$$

et que l'on fasse, pour abréger,

$$aa + \sqrt{-1 - a^2} = \epsilon,$$

l'équation (4) devient

$$z = ax + \epsilon y + \gamma;$$

$a$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , étant trois constantes arbitraires.

Non-seulement le plan est compris dans l'équation (4), mais il est la seule surface réelle que l'on en puisse déduire : au moyen de la fonction arbitraire qu'elle contient, on peut bien assujettir la surface représentée par cette équation, à passer par une courbe donnée ; mais alors cette surface se réduira à une courbe isolée, de la même manière que les courbes planes se réduisent quelquefois à des points qu'on appelle *conjugués*. Par exemple, si l'on trace sur le plan des  $z$  et  $x$  une courbe quelconque, par laquelle on veut faire passer la surface en question, il faut faire  $y = 0$  dans l'équation (4), ce qui la réduit à  $z = \phi x$ , équation qui doit coïncider avec celle de la courbe donnée, ce qui détermine la forme de la fonction  $\phi$ . Maintenant, pour savoir si la surface s'étend hors du plan des  $x$  et  $z$ , je donne à  $y$  une valeur que l'on pourra supposer aussi petite qu'on voudra ; développant la valeur de  $z$ , suivant les puissances de  $y$ , on aura

$$z = \phi x + y(a\phi'x + \sqrt{-1 - a^2}) + \frac{y^2}{2} a^2 \phi''x + \text{etc.};$$

or, il est évident qu'excepté le cas où  $\phi'x$  seroit une quantité constante, le coefficient de  $y$  sera imaginaire, et par conséquent aussi la valeur de  $z$ . Le cas d'exception, où  $\phi'x$  est une constante, est le cas dans lequel la courbe tracée sur le plan des  $x$  et  $z$ , est une droite, et où la surface demandée est un plan ; donc le plan est la seule surface réelle qui soit comprise dans l'équation (4).

Ce résultat étoit facile à prévoir, en observant que l'équation (1) est celle des surfaces dont les deux courbures en chaque point sont égales et contraires ; d'ailleurs, l'équation (3) appartient à une surface développable, et même à un cylindre, dont la propriété est d'avoir en tous ses points une courbure nulle ; il faut donc, pour qu'une même surface satisfasse à-la-fois à ces deux équations, qu'elle ait ses deux courbures nulles, ou qu'elle soit plane dans toute son étendue.

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

Par M. MONGE.

*Problème.* — Etant donnée l'équation

$$\left. \begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 \\ + 2(Dyz + Ezx + Fxy) \end{aligned} \right\} = 1 \quad (A)$$

d'une surface quelconque du second degré, rapportée à son centre comme origine, trouver la grandeur  $R$  d'un de ses demi axes rectangulaires ?

*Solution.* — Si l'on conçoit la sphère dont le rayon est  $R$ , et qui est concentrique à sa surface, l'équation de la surface de cette sphère, rapportée à la même origine et aux mêmes lignes des  $x, y, z$ , sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (B)$$

et ces deux surfaces se toucheront dans deux des sommets de la surface du second degré pour chacun desquels les quantités  $x, y, z, p, q$  auront les mêmes valeurs. Si l'on différencie partiellement ces deux équations, la première donnera

$$Ax + Fy + Ez + p(Ex + Dy + Cz) = 0$$

$$Fx + By + Dz + q( \quad ) = 0$$

et la seconde,

$$x + pz = 0$$

$$y + qz = 0.$$

Ces quatre dernières équations, par l'élimination des deux quantités  $p, q$ , donneront les deux nouvelles équations

$$z(Ax + Fy + Ez) - x(Ex + Dy + Cz) = 0 \quad (C)$$

$$z(Fx + By + Dz) - y( \quad ) = 0 \quad (D)$$

Et si entre les quatre équations  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$ ,  $(D)$ , on élimine les trois coordonnées  $x, y, z$ , il résultera l'équation qui donnera la valeur de  $R$ .

Pour faciliter cette élimination, faisons

$$Ax + Fy + Ez = L \quad (E)$$

$$Fx + By + Dz = M \quad (F)$$

$$Ex + Dy + Cz = N \quad (G)$$

ce qui introduit les trois nouvelles indéterminées  $L, M, N$ .

Les trois équations  $(A)$ ,  $(C)$ ,  $(D)$ , deviendront

$$Lx + My + Nz = 1 \quad (A')$$

$$Lz = Nx \quad (C')$$

$$Mz = Ny \quad (D')$$

et nous aurons les sept équations  $(A')$ ,  $(B)$ ,  $(C')$ ,  $(D')$ ,  $(E)$ ,  $(F)$ ,  $(G)$ , entre lesquelles il faudra éliminer les six quantités  $x, y, z, L, M, N$ .

Or, les trois dernières équations  $(A')$ ,  $(C')$ ,  $(D')$ , donnent pour  $x, y, z$ , les valeurs suivantes

$$x = \frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}$$

$$y = \frac{M}{L^2 + M^2 + N^2}$$

$$z = \frac{N}{L^2 + M^2 + N^2}$$

qui, substituées dans  $(B)$ , donnent

$$\frac{1}{L^2 + M^2 + N^2} = R^2$$

donc les valeurs de  $x, y, z$ , deviendront

$$x = LR^2, \quad y = MR^2, \quad z = NR^2.$$

Actuellement si l'on substitue les valeurs de  $x, y, z$ , dans les trois équations  $(E)$ ,  $(F)$ ,  $(G)$ , elles deviendront

(417)

$$\left. \begin{aligned} L(AR^2-1) + MER^2 + NER^2 &= 0 & (E') \\ LFR^2 + M(BR^2-1) + NDR^2 &= 0 & (F') \\ LER^2 + MDR^2 + N(CR^2-1) &= 0 & (G') \end{aligned} \right\}$$

ou, faisant pour abréger,

$$AR^2 - 1 = A'R^2$$

$$BR^2 - 1 = B'R^2$$

$$CR^2 - 1 = C'R^2,$$

on aura

$$LA' + MF + NE = 0$$

$$LF + MB' + ND = 0$$

$$LE + MD + NC' = 0$$

entre lesquelles il ne s'agit plus que d'éliminer les trois quantités  $L, M, N$ , ce qui est possible, puisque les seconds membres sont tous trois égaux à zéro, et donnent pour résultat

$$A'B'C' + 2DEF = A'D^2 + B'E^2 + C'F^2$$

enfin, remettant par  $A', B', C'$ , leurs valeurs, et ordonnant par rapport à  $R$ , on a

$$\left. \begin{aligned} R^6 \{ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2\} \\ - R^4 \{AB + CA + BC - D^2 - E^2 - F^2\} \\ + R^2 \{A + B + C\} \\ - 1 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Equation qui donne les valeurs des six demi axes rectangulaires ; ces demi axes sont égaux deux à deux et de signes contraires, ce qui réduit l'équation au troisième degré.

*Autre Solution du même Problème,*

Par M. HACHETTE.

Soit l'équation générale de la surface du second degré, rapportée à trois droites rectangulaires passant par son centre :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = H.$$

Je suppose qu'on ait l'équation du plan tangent à cette surface en un point  $x', y', z'$  ;

$$\left. \begin{aligned} & x (Ax' + B''y' + B'z') \\ & + y (B''x' + A'y' + Bz') \\ & + z (B'x' + By' + A''z') \end{aligned} \right\} = H$$

et pour abrégé ,

$$Lx + My + Nz = H.$$

On obtient cette équation en menant par le point  $x', y', z'$ , une droite qui coupe la surface en un point  $x'', y'', z''$ . Les équations de cette droite sont de la forme

$$x - x' = l(z - z'), \quad y - y' = m(z - z').$$

Cette droite de sécante devient une tangente de la surface, lorsqu'on a

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z''.$$

De ces trois équations, on déduit la relation des deux constantes  $l$  et  $m$ , pour que la droite soit une tangente. On substitue dans l'équation entre  $l$  et  $m$ , pour  $l$ ,  $\frac{x - x'}{z - z'}$ , pour  $m$ ,  $\frac{y - y'}{z - z'}$ , et l'équation en  $x, y, z$ , qu'on obtient, appartient au plan qui touche la surface du second degré au point  $x', y', z'$ .

Nommant  $X, Y, Z$ , les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan tangent  $Lx + My + Nz = H$ , et  $R$  la longueur de cette perpendiculaire

$$R = \frac{H}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

$$X = \frac{LR^2}{H}, \quad Y = \frac{MR^2}{H}, \quad Z = \frac{NR^2}{H}.$$

Lorsque cette perpendiculaire se confond avec l'un des axes principaux de la surface, on a

$$X = x', \quad Y = y', \quad Z = z',$$

ce qui donne

$$R^2 - Hx' = 0, \quad R^2 M - Hy' = 0, \quad R^2 N - Hz' = 0.$$

Substituant dans ces trois équations pour  $L, M, N$ , les quantités qu'elles représentent, elles deviennent

$$R^2 (Ax' + B''y' + B'z') - Hx' = 0,$$

$$R^2 (B''x' + A'y' + Bz') - Hy' = 0,$$

$$R^2 (B'x' + By' + A''z') - Hz' = 0.$$

Les équations de la perpendiculaire à la surface du second degré, qui coïncide avec l'un des axes principaux de cette surface, sont

$$x = \frac{x'}{z'} z, \quad y = \frac{y'}{z'} z;$$

nommant  $\lambda$  et  $\mu$  les deux tangentes  $\frac{x'}{z'}$ ,  $\frac{y'}{z'}$ , qui déterminent la direction de cet axe, les trois équations précédentes deviendront

$$R^2 (A\lambda + B''\mu + B') - H\lambda = 0, \quad (1)$$

$$R^2 (B'\lambda + A'\mu + B) - H\mu = 0, \quad (2)$$

$$R^2 (B'\lambda + B\mu + A'') - H = 0. \quad (3)$$

De ces trois équations, on éliminera successivement deux des trois inconnues  $\frac{R^2}{H}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ , chaque équation finale sera du troisième degré.

Paris, le 18 janvier 1813.

Pendant mon dernier séjour en Italie, ayant eu connoissance du savant rapport (\*) de notre ami M. Poisson, sur une matière dont je m'étois occupé, j'écrivis, à ce sujet, le simple énoncé des résultats qui n'étoient pas encore sortis de ma mémoire.

J'adressai cet exposé succinct à M. Sané, Inspecteur général du Génie maritime, le priant de présenter ma notice à la Classe de l'Institut, dont il fait partie. Je désirerois que vous voulussiez insérer dans la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, cette même notice que je joins à ma lettre.

Signé Ch. DUPIN.

(\*) Séance de l'Institut, 31 août 1812.

*Mémoire sur la Sphère tangente à trois ou à quatre autres;*

Par CH. DUPIN.

Pise, 1<sup>re</sup>. octobre 1812.*Notice.*

Un problème dont beaucoup de Géomètres se sont occupés, est celui de mener sur un plan un cercle tangent à trois autres cercles, et plus généralement, dans l'espace, une sphère tangente à quatre sphères données.

Si je ne me trompe, le premier géomètre qui l'ait complètement résolu, est Fermat (\*). Depuis, Euler a repris la même question; mais tandis que Fermat s'étoit servi de la méthode des Anciens, Euler a employé l'analyse. M. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, s'en est encore occupé. Enfin, plusieurs élèves de l'Ecole Polytechnique ont atteint le même but par les méthodes de la *Géométrie descriptive*. Parmi ces derniers, je citerai surtout l'infortuné Dupuis, qui par ses premiers succès sembloit promettre de beaux progrès à la géométrie. Quelle est donc la fatalité qui nous a sitôt enlevé les trois hommes qui cultivoient plus particulièrement la science de l'étendue pour hériter de la gloire de nos premiers créateurs en ce genre? Nous avons vu disparaître, presque à-la-fois, Dupuis, Lancret et Malus!

On connoît quelques résultats de leurs travaux sur le sujet qui nous occupe; je crois d'ailleurs que la méthode qui les y a conduits n'a pas été transmise à l'Ecole Polytechnique, du moins je ne sache pas qu'aucun professeur l'ait fait connoître, ou seulement l'ait conservée; et leur démonstration, qu'on trouve dans la Correspondance Polytechnique, appartient à M. Hachette.

J'ai osé, il y a dix ans, reprendre un sujet traité si souvent, et jamais, ce me semble, avec la généralité qu'il comporte. J'eus l'honneur de soumettre mes solutions à M. Monge, et j'eus le bonheur d'obtenir, d'un tel géomètre, des encouragemens, trop indulgens, sans doute. M. Carnot, après avoir examiné les mêmes recherches, voulut bien m'engager à les compléter en y joignant la solution de quelques autres questions, parmi lesquelles

(\*) Voyez cette solution dans le mémoire traduit par M. Hachette, septième et huitième cahiers du Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction.

étoit celle-ci ; *tracer sur la sphère un cercle tangent à trois autres*. J'offris , le lendemain même , à cet illustre savant , la solution de cette question , mais généralisée , en déterminant soit par la géométrie , soit par l'analyse , la courbe plane tracée sur une surface du second degré tangentielllement à trois autres sections planes quelconques. De là j'eus occasion de déduire immédiatement , par les considérations de la géométrie aux trois dimensions , plusieurs des belles propriétés qu'on trouve dans la *Géométrie de position* , sur les polygones inscrits aux courbes du second degré , et les points de concours de leurs diagonales ou de leurs côtés prolongés.

Il fut décidé que mon mémoire feroit partie de la collection des journaux de l'Ecole Polytechnique. L'impression de mon mémoire ayant été retardée , je le retirai pour le perfectionner ; et , dans un voyage précipité que je dus faire en Belgique , je le perdís.

J'ai su depuis que M. Hachette a rendu compte de mes travaux au sujet des questions traitées dans ce mémoire , en donnant l'analyse d'une des solutions qu'il contenoit. Cette analyse est dans le second cahier de la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique ( premier volume ).

Depuis cette époque , envoyé tour-à-tour en Hollande , en Italie , dans le midi de la France et dans les îles Ioniennes , je n'ai jamais refait mon mémoire. Cependant prêt à revoir ma patrie , j'apprends par un de mes amis que l'Institut a fait l'objet de son examen , d'un travail très-intéressant , où la question du contact des cercles et des sphères est généralement résolue , mais , à ce qu'il paroît , par des principes différens.

Encore convalescent , aux bains de Pise , je suis incapable d'un travail suivi. Je me bornerai donc , pour l'instant , à présenter l'énoncé des principaux théorèmes que ma mémoire pourra me rappeler , me réservant , si je recouvre la santé , de réviser de nouveau mes solutions , et d'en faire hommage à mes juges , si les résultats que je vais indiquer ont le bonheur de mériter leur indulgence.

# I.

*De la Sphère tangente à trois autres , et ensuite à quatre autres.*

Une infinité de sphères peuvent être tangentes à trois sphères invariables données ; à chaque nouvelle sphère tangente aux trois primitives correspond , 1° un point de contact entr'elle et celles-ci ; 2°. son propre centre : cela posé ,

La suite des points de contact marqués sur chaque sphère primitive par les nouvelles sphères, forme une courbe continue plane, et par conséquent circulaire.

La suite des centres des nouvelles sphères forme pareillement une courbe plane et continue, mais d'une forme plus générale; c'est une courbe du second degré.

Ces deux beaux théorèmes sont dus à Dupuis, qui nécessairement a dû parvenir aussi à quelques-uns des résultats suivans, quoique je n'en aie pas eu connoissance.

Si l'on conçoit les trois (1) cônes circonscrits aux trois sphères primitives prises deux à deux, on sait que leurs sommets sont en ligne droite : cette droite est évidemment dans le plan, lieu des centres de ces trois sphères.

Maintenant le plan de la courbe, lieu des centres des nouvelles sphères, est toujours perpendiculaire à cette droite.

De plus, si l'on considère en particulier une des nouvelles sphères (tangentes aux trois primitives), que par le point de contact qu'elle a sur chacune des trois sphères primitives, on mène trois tangentes aux courbes de contact tracées sur celles-ci, d'abord ces tangentes se rencontreront, et elles se rencontreront toutes trois en un seul et même point.

Lorsque la nouvelle sphère variera, les tangentes prendront dans l'espace une autre direction; mais elles se couperont toutes trois encore en un même point, et la suite de tous ces points d'intersection formera une ligne droite.

Cette droite sera toujours perpendiculaire au plan des centres des trois sphères données. Il y a plus, elle sera placée sur le plan, lieu des centres de toutes les nouvelles sphères.

Enfin, la tangente à la courbe, lieu des centres, viendra constamment passer par cette droite, précisément par le point d'intersection des tangentes aux courbes de contact, et en formant le même angle avec ces trois dernières tangentes. Ainsi cette droite est à-la-fois l'intersection de quatre plans, savoir, celui de la courbe des centres et les trois plans des courbes de contact; or cette droite remarquable est telle, que les cônes circonscrits à-la-fois à deux des sphères cherchées, ont tous leurs centres sur elle.

Elle joue donc, par rapport aux nouvelles sphères, le même

---

(1) Il y en a six, et ce sont leurs combinaisons deux à deux qui produisent les diverses solutions de la question, mais elles sont indépendantes; et ce qui est vrai pour l'une est applicable à toutes les autres : dans cette notice nous n'en considérerons qu'une seule.

rôle que la droite, lieu des centres des cônes circonscrits aux sphères primitives prises deux à deux, joue par rapport à ces premières sphères.

Lorsqu'une sphère nouvelle touche seulement deux des primitives, les plans menés tangentielllement à ces surfaces primitives par leur point de contact avec l'autre, se coupent suivant une droite constamment placée dans un même plan, tant que les deux sphères primitives restent les mêmes.

En considérant ainsi deux à deux les trois sphères primitives, on trouvera trois plans remarquables; ils se couperont tous trois suivant une même droite, et cette droite, ce sera précisément le lieu des points de concours des tangentes aux trois courbes de contact et de la tangente à la courbe des centres, toutes quatre correspondant à une seule et même sphère nouvelle.

Dans le cas où l'on auroit quatre sphères primitives, auxquelles il faudroit trouver une sphère tangente, ou trouveroit ainsi six plans remarquables, dont chacun seroit le lieu des intersections des plans tangens à la sphère nouvelle et aux primitives prises deux à deux; ces plans seroient perpendiculaires aux six arêtes de la pyramide triangulaire ayant pour sommets les centres des sphères primitives, etc.

Ces plans se couperont trois à trois suivant une même droite : ils présenteront ainsi quatre droites, qui elles-mêmes se rencontreront en un seul et même point. Enfin ce point sera à-la-fois 1°. sur les plans des courbes des centres des sphères tangentes aux primitives prises trois à trois; 2°. sur les plans des courbes de contact de ces nouvelles sphères et des primitives.

De là résulte une méthode de géométrie descriptive, aussi simple que facile, pour résoudre tous les problèmes de sphères tangentes à trois ou à quatre autres, des cercles tangens à trois autres, etc. (1)

Passons à d'autres considérations, et demandons-nous maintenant de quelle nature est la surface enveloppe de l'espace parcouru par une sphère tangente à trois sphères invariables primitivement données.

## II.

*Surface engendrée par la Sphère qui s'appuie sur trois autres.*

Cette surface jouit de la propriété constante, et elle en jouit

---

(1) On la fera connoître dans le prochain cahier de la Correspondance.

seule, d'avoir, dans toute son étendue, des cercles pour ses deux lignes de courbures. Ainsi, après l'avoir déterminée généralement, si l'on prend trois des sphères mobiles génératrices, qu'on les regarde comme fixes et invariables, et qu'ensuite on se demande quelle surface enveloppera l'espace parcouru par une autre sphère variable et partout tangente à ces trois-ci, on retrouvera précisément l'enveloppe de l'espace parcouru par la sphère mobile et variable, toujours tangente aux trois primitives.

Le lieu des centres de courbure de cette enveloppe n'est point formé par deux nappes de surface, mais par deux courbes distinctes. L'une d'elles est une ellipse, l'autre est une hyperbole. La première a pour sommets les foyers de la seconde, et pour foyers les sommets de celle-ci. Enfin, leurs plans sont perpendiculaires.

Cela posé, si l'on attache des fils, d'abord à tous les points de l'ellipse, qu'on les tende et les réunisse en un seul point, de manière à en former le faisceau des arêtes d'un cône de révolution; lorsqu'ensuite on allongera, ou qu'on raccourcira tous les fils d'une égale quantité; 1°. tous les fils ne cesseront pas d'être tendus; 2°. ils formeront un cône, plus ou moins fermé, mais toujours de révolution; 3°. le sommet du cône décrira l'hyperbole, lieu des centres de l'autre courbure; 4°. enfin, la tangente à cette hyperbole au sommet, ou, pour mieux dire, au centre de chaque cône, sera constamment l'axe de ce cône.

Et réciproquement, si l'on attacheoit tous les fils aux divers points de l'hyperbole, qu'on les tendit, et qu'avec le point qui les réunit, on voulût parcourir l'ellipse, 1°. les fils s'allongeroient ou se raccourciraient toujours d'une égale quantité; 2°. le cône ne cesseroit pas d'être de révolution, etc.

*Ainsi les courbes du second degré ont une infinité de foyers; elles peuvent être décrites librement dans l'espace, et d'une infinité de manières différentes, par trois rayons vecteurs partis de trois foyers fixes et placés sur une autre courbe du second degré, etc.*

Quand l'une des deux courbes est une parabole, l'autre l'est également: les deux paraboles sont égales, etc.

L'analyse de ces propriétés est aussi consignée dans la Correspondance Polytechnique, dans le précis d'un travail que j'ai fait sur la théorie des déblais et remblais, avec quelques applications à l'optique, tom. I, pag. 218.

Nous ne pousserons pas plus loin la discussion de la surface enveloppe dont les deux lignes de courbure sont des cercles, elle

conduit à quelques propriétés remarquables, à celle-ci, par exemple :

Toutes les lignes d'une des courbures sont dans des plans qui passent à-la-fois par une première droite, placée sur le plan lieu des centres de l'autre courbure ; toutes les lignes de l'autre courbure sont dans des plans qui passent à-la-fois par une seconde droite, placée sur le plan lieu des centres de la première courbure ; et l'axe commun de l'ellipse et de l'hyperbole, lieux des centres, est dirigé sur la ligne qui mesure la plus courte distance de ces deux droites : enfin, les lignes d'une même courbure, prises deux à deux, sont toutes sur des cônes du second degré, par conséquent ils sont deux à deux sur une même sphère, propriété remarquable ; et les sommets de ces cônes sont encore placés sur les droites qui dirigent la position de ces lignes de courbure.

De là suit cette propriété générale de la sphère : je prends sur la sphère une corde quelconque, je mène les deux plans tangens à la sphère, aux extrémités de cette corde, et je trace la droite intersection de ces deux plans ; cela posé,

Je conçois toutes les sections planes, faites sur la sphère, 1°. par la corde ; 2°. par l'autre droite. Les circonférences de ces sections se couperont partout à angle droit. Cette propriété peut trouver son application dans la coupe des pierres.

---

## THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

---

Etant données trois sphères fixes, on suppose qu'une sphère dont le centre et le rayon varient, touche constamment les trois sphères données ; *le lieu des points de contact de la sphère variable et de l'une quelconque des sphères fixes, est un petit cercle de cette dernière sphère, dont le plan est perpendiculaire à celui qui passe par les centres des trois sphères données.* (*Voyez le premier volume de la Correspondance, page 19.*)

---

*Démonstration analytique, par M. HACHETTE.*

En rapportant l'espace aux trois axes rectangulaires des  $x$ , des  $y$ , des  $z$ , je suppose que le plan mené par les centres des trois sphères données, soit le plan des  $xy$ , et que les centres de ces

sphères soient, le premier à l'origine des coordonnées, le second sur l'axe des  $x$ , et le troisième en un point donné du plan  $xy$ .

Nommons  $r, r', r'', \rho$ , les rayons des trois sphères données et de la sphère qui les touche;  $a'$  la distance du centre de la seconde sphère à l'origine des coordonnées;  $a'', b''$ , les coordonnées du centre de la troisième sphère;  $\alpha, \beta, \gamma$ , les coordonnées du centre de la sphère du rayon  $\rho$ .

Lorsque deux sphères se touchent, la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons. En appliquant ce principe à la distance des centres de la sphère du rayon  $\rho$  et de chacune des sphères qu'elle touche, on aura les trois équations suivantes :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r)^2. \quad (1)$$

$$(\alpha - a')^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r')^2. \quad (2)$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 + \gamma^2 = (\rho \pm r'')^2. \quad (3)$$

Ces trois équations représentent celles qu'on obtiendrait en prenant toutes les combinaisons des termes affectés du signe  $\pm$ ; ces combinaisons, au nombre de huit, peuvent s'écrire ainsi

$$\rho + r, \text{ ou } \rho - r \left\{ \begin{array}{ll} \rho + r', & \rho + r'' \\ \rho + r', & \rho - r'' \\ \rho - r', & \rho + r'' \\ \rho - r', & \rho - r'' \end{array} \right\}$$

La quantité  $\rho + r$ , ou  $\rho - r$ , peut se combiner avec chacune des deux autres placées sur une même horizontale de ce tableau; ce qui donne évidemment huit combinaisons. Ne considérant que la première de ces combinaisons,

$$\rho + r, \quad \rho + r', \quad \rho + r'',$$

les équations (1), (2), (3), deviendront

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho + r)^2 \quad (A)$$

$$(\alpha - a')^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\rho + r')^2 \quad (B)$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 + \gamma^2 = (\rho + r'')^2 \quad (C)$$

Retranchant successivement de l'équation (A), les équations (B)

et (C), on aura

$$2\rho(r-r') = 2a'\alpha - a'^2 - (r^2 - r'^2) \quad (b)$$

$$2\rho(r-r'') = 2a''\alpha + 2b''\beta - a''^2 - b''^2 - (r^2 - r''^2) \quad (c)$$

Eliminant  $\rho$ , qui est linéaire dans ces deux équations (b) et (c),

$$(r-r')\{2a''\alpha + 2b''\beta - a''^2 - b''^2 - r^2 + r'^2\} - (r-r'')\{2a'\alpha - a'^2 - r^2 + r''^2\} = 0. \quad (D)$$

Cette équation (D) étant linéaire en  $\alpha, \beta$ , coordonnées du centre de la sphère qui touche les trois sphères données, et ne contenant ni la troisième coordonnée  $\gamma$  de ce centre, ni le rayon  $\rho$  de cette sphère, il suit que les centres de toutes les sphères tangentes aux trois sphères données, sont dans un plan perpendiculaire au plan des  $xy$ , et qui passe par la droite, dont on aura l'équation en mettant dans l'équation (D), au lieu de  $\alpha, \beta$ , les coordonnées  $x, y$ , d'un point quelconque de cette droite. Supposons qu'après cette substitution, elle devienne

$$(5) \begin{cases} (r-r')(2a''x + 2b''y - A) - (r-r'')(2a'x - B), \\ \text{ou } (r'-r)(\quad) - (r''-r)(\quad), \end{cases}$$

$A$  et  $B$  étant des constantes connues, qui ne changent pas, quel que soit le signe des rayons  $r, r', r''$ . Cette équation (5) représente celles qui correspondent aux valeurs de  $r-r'$  et  $r-r''$ , dépendantes des signes des rayons  $r', r''$ . Or, ces valeurs sont au nombre de quatre :

$$1^\circ. \quad r-r' \quad \text{et} \quad r-r'';$$

$$2^\circ. \quad r-r' \quad \text{et} \quad r+r'';$$

$$3^\circ. \quad r+r' \quad \text{et} \quad r-r'';$$

$$4^\circ. \quad r+r' \quad \text{et} \quad r+r''.$$

En changeant dans l'équation (5) les signes des rayons  $r, r', r''$ , on changeroit seulement les signes de tous les termes de cette équation; ce qui prouve que l'équation (5) ne représente que quatre droites différentes. D'où il suit que les centres des sphères du rayon variable  $\rho$ , qui touchent les trois sphères données, sont contenues dans quatre plans, dont l'un correspondant aux différences  $r-r', r-r''$ , a pour trace la droite de l'équation (5) ( $x$  et  $y$  étant les coordonnées d'un point de cette droite).

Concevons la droite menée par l'origine des coordonnées, centre de la première des sphères données, et par le point  $\alpha, \beta, \gamma$ ,

centre de la sphère donnée  $\rho$ , qui les touche ; cette droite a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{r}{r+\rho}.$$

Elle coupe la première sphère dont l'équation est  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , en un point pour lequel on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{r}{r+\rho}; \quad \text{d'où l'on tire } \rho = \frac{r(\alpha - x)}{x}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b), cette équation donne

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = \frac{x(a'^2 - (r-r')^2)}{a'x - r(r-r')}, \\ \text{et à cause de } 2\beta = \frac{2\alpha\gamma}{x}, \quad 2\gamma = \frac{2\alpha z}{x}, \\ 2\beta = \frac{\gamma(a'^2 - (r-r')^2)}{a'x - r(r-r')}, \quad 2\gamma = \frac{z(a'^2 - (r-r')^2)}{a'x - r(r-r')} \end{array} \right.$$

Mettant ces valeurs de  $2\alpha$  et  $2\beta$  dans l'équation (D), et l'ordonnant par rapport à  $x$  et à  $y$ , on a

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} x \left\{ \begin{array}{l} (a'^2 - (r-r')^2)(a''(r-r') - a'(r-r'')) \\ - a'(r-r')(a''^2 + b''^2 + r^2 - r'^2) - a'(r-r'')(r'^2 - r^2 - a^2) \end{array} \right\} \\ + b^2\gamma(r-r')(a'^2 - (r-r')^2) \\ - r(r-r')^2(a''^2 + b''^2 + r^2 - r'^2) - r(r-r')(r-r'')(a^2 + r^2 - r'^2) \end{array} \right\} = 0$$

Equation linéaire en  $x$  et  $y$ , et qui est satisfaite en changeant les signes des rayons  $r, r', r''$ . Elle ne contient ni le rayon  $\rho$ , ni les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$ , du centre de la sphère mobile, qui touche les trois sphères données; elle exprime la relation des coordonnées  $x, y$ , du point de contact de cette sphère mobile et de la sphère fixe  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Donc le lieu de ces points de contact est un petit cercle de la sphère fixe, dont le plan est perpendiculaire à celui des  $xy$ , qui contient les centres des trois sphères données.

Mettant successivement dans l'équation (F), pour les différences  $r - r'$  et  $r - r''$ , les quatre valeurs qui correspondent aux signes des rayons  $r, r', r''$ , on aura les équations des quatre petits

circles de la première sphère, correspondans aux quatre séries des sphères qui peuvent toucher les trois sphères données.

Quoique nous n'ayons considéré que la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées, la démonstration précédente s'applique également aux deux autres sphères, puisque, sans changer leur position respective, on pourroit transporter l'origine des coordonnées au centre de l'une ou l'autre de ces deux sphères.

*Rectification d'un arc d'ellipse par les séries ;*

Par M. de STAINVILLE, Répétiteur-Adjoint à l'Ecole Polytechnique.

Supposons que l'arc dont il s'agit, ait son origine à l'une des extrémités du petit axe, et que les abscisses soient comptées sur le grand axe à partir du centre. Si on désigne par  $x$  l'abscisse qui correspond à l'arc  $u$ , il est clair que l'expression de cet arc ne doit contenir que des termes multipliés par des puissances de  $x$ , puisqu'il s'évanouit lorsqu'on fait  $x = 0$ ; et comme il change de signe avec  $x$ , sans changer de grandeur, il en résulte que le développement de l'arc exprimé par l'abscisse ne doit contenir que des puissances impaires de  $x$ . Ainsi on aura, pour toutes les valeurs de  $u$ ,

$$u = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{etc.}$$

Si on différencie cette équation par rapport à  $x$ , on aura

$$\frac{du}{dx} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \text{etc.} \quad (1)$$

Mais

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}.$$

Si donc on représente  $\frac{du}{dx}$  par  $y$ , on aura, après avoir élevé

les deux membres au carré et fait disparaître les dénominateurs, l'équation

$$1 - e^2 x^2 = y^2 (1 - x^2).$$

Différentiant cette nouvelle équation, par rapport à  $x$ , on en aura une autre qui se réduira au moyen de substitutions convenables à

$$y^2 - 1 = (x - x^3) y \frac{dy}{dx}.$$

Divisant par  $y$ , et différenciant, on aura, après quelques réductions, une équation différentielle du second ordre, qui sera

$$\frac{dy}{dx} (1 + 2x^2 - 3e^2 x^4) = \frac{d^2 y}{dx^2} (x - x^3 - e^2 x^3 + e^2 x^5).$$

Si, pour abréger, on représente les coefficients du développement de  $\frac{dy}{dx}$ , ou de  $y$  par  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , on aura

$$y = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \dots$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5.6\gamma x^4 + \dots$$

Portant ces valeurs de  $\frac{dy}{dx}$  et de  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  dans l'équation différentielle du second ordre, on aura, en supprimant le premier terme de chaque membre, l'équation suivante

$$\left. \begin{array}{l} + 4\beta \\ + 4\alpha \end{array} \right| x^3 \left. \begin{array}{l} + 6\gamma \\ + 8\beta \\ - 2.3\alpha e^2 \end{array} \right| x^5 \left. \begin{array}{l} + 8\delta \\ + 12\gamma \\ - 3.4\beta e^2 \end{array} \right| x^7 + \text{etc.} \left. \begin{array}{l} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \\ - \text{etc.} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} + 3.4\beta \\ - 2\alpha \end{array} \right| x^3 \left. \begin{array}{l} + 5.6\gamma \\ - 3.4\beta \\ - 3.4\beta e^2 \end{array} \right| x^5 \left. \begin{array}{l} + 7.8\delta \\ - 5.6\gamma \\ + 5.6\gamma e^2 \end{array} \right| x^7 + \text{etc.} \left. \begin{array}{l} - \text{etc.} \\ - \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Comparant les coefficients des termes affectés des mêmes puis-

ances de  $x$ , on aura

$$\begin{aligned} 2. \quad 4\beta &= (3 + e^2). 2\alpha \\ 4. \quad 6\gamma &= (5 + 3e^2). 4\beta - 8. 1. \alpha e^2 \\ 6. \quad 8\delta &= (7 + 5e^2). 6\gamma - 8. 3. \beta e^2 \\ 8. \quad 10\epsilon &= (9 + 7e^2). 8\delta - 8. 6. \gamma e^2 \\ 10. \quad 12\zeta &= (11 + 9e^2). 10\epsilon - 8. 10. \delta e^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En général, si on désigne par  $\chi$  le coefficient de  $x^\mu$ , on aura, en appelant  $\phi$  et  $\psi$  les coefficients des deux termes qui précèdent immédiatement ce dernier,

$$(2\mu-2)2\mu\chi = \{2\mu-1+(2\mu-3)e^2\}(2\mu-2)\psi - 8 \frac{(\mu-2)(\mu-1)}{2} \phi.e^2.$$

Pour déterminer  $\alpha$ , il faut développer  $\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}$  jusqu'au second terme, et on aura  $\alpha = \frac{1-e^2}{2}$ , ou ce qui revient au même

$\alpha = \frac{b^2}{2}$ ; portant cette valeur dans les autres coefficients, ils seront tous déterminés, et on aura, à cause des équations  $2B=\alpha; 3C=\beta; 4D=\gamma$ , etc, l'équation suivante,

$$u = x + \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^5}{5} + \frac{\gamma x^7}{7} + \text{etc.}$$

Si on fait

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \alpha_1 b^2 \\ 2.4\beta &= \beta_1 b^2 \\ 2.4.6\gamma &= \gamma_1 b^2 \\ 2.4.6.8\delta &= \delta_1 b^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

L'équation précédente se présente sous une forme plus élégante, et on a

$$u = x + \frac{\alpha_1 b^2 x^3}{2.3} + \frac{\beta_1 b^4 x^5}{2.4.5} + \frac{\gamma_1 b^6 x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

Pour déterminer  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , etc., on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \beta_1 &= \{ 3 + e^2 \} \alpha_1 \\ \gamma_1 &= \{ 5 + 3e^2 \} \beta_1 - 8. \quad 1. \alpha_1 e^2 \\ \delta_1 &= \{ 7 + 5e^2 \} \gamma_1 - 8. \quad 3. \beta_1 e^2 \\ \epsilon_1 &= \{ 9 + 7e^2 \} \delta_1 - 8. \quad 6. \gamma_1 e^2 \\ \zeta_1 &= \{ 11 + 9e^2 \} \epsilon_1 - 8. \quad 10. \delta_1 e^2 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Si dans ces équations on fait  $e=0$ , les coefficients prennent des valeurs qui, étant introduites dans la formule

$$u = x + \frac{\alpha_1 b^2 x^3}{2.3} + \frac{\beta_1 b^2 x^5}{2.4.5} + \frac{\gamma_1 b^2 x^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

donnent

$$u = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

ce qui doit être, car l'hypothèse de  $e=0$  faisant rentrer l'ellipse dans le cercle, l'expression d'un arc d'ellipse doit alors coïncider avec celle de l'arc correspondant du cercle : ce qui a lieu ici, puisque  $x$  est égal au sinus de l'arc  $u$ .

---

---

*Démonstration de la formule qui donne la tangente de la somme de plusieurs arcs en fonction des tangentes de ces arcs ;*

Par M. de STAINVILLE.

---

Pour arriver à cette formule de la manière la plus simple, nous considérerons le produit des facteurs

$$\cos a + \sin a \sqrt{-1}, \cos b + \sin b \sqrt{-1}, \cos c + \sin c \sqrt{-1};$$

ce produit, ainsi qu'on le sait, est égal à

$$\cos (a + b + c + \dots) + \sin (a + b + c + \dots) \sqrt{-1}.$$

Ainsi le coefficient de  $\sqrt{-1}$  dans le produit des facteurs dont

il s'agit, sera égal à  $\sin(a + b + c\dots)$ , et le terme indépendant de  $\sqrt{-1}$ , sera égal à  $\cos(a + b + c\dots)$ ; par conséquent le coefficient de  $\sqrt{-1}$ , dans le produit des facteurs

$$(\cos a + \sin a \sqrt{-1}), \quad (\cos b + \sin b \sqrt{-1})\dots$$

divisé par la somme des termes indépendans de  $\sqrt{-1}$ , sera égal à

$$\text{tang}(a + b + c + d\dots)$$

Pour montrer la loi des termes du produit des facteurs que l'on considère, nous diviserons chacun d'eux par son premier terme et nous multiplierons le produit de tous les facteurs ainsi divisés, par le produit de ces premiers termes; ce qui donnera

$$\cos(a + b + c + d\dots) + \sin(a + b + c + d\dots)\sqrt{-1} =$$

$$\cos a \cos b \cos c \cos d\dots \{1 + \text{tang } a \sqrt{-1}\}$$

$$\{1 + \text{tang } b \sqrt{-1}\} \{1 + \text{tang } c \sqrt{-1}\}$$

$$\dots\dots\dots$$

Les termes réels et imaginaires du produit des facteurs binomes qui se trouvent dans le second membre de cette équation étant multipliés par  $\cos a \cos b \cos c \cos d\dots$  ce facteur disparaîtra dans la division des premiers termes par les seconds, de sorte qu'en dernière analyse l'expression de  $\text{tang}(a + b + c + d\dots)$  sera égale à la somme des termes, qui, dans le produit de

$$\{1 + \text{tang } a \sqrt{-1}\} \{1 + \text{tang } b \sqrt{-1}\} \{1 + \text{tang } c \sqrt{-1}\} \dots$$

est multipliée par  $\sqrt{-1}$ , divisée par la somme de ceux qui ne sont pas multipliés par  $\sqrt{-1}$ . Or, la somme des premiers est égale à la somme des tangentes, moins tous les produits trois à trois de ces tangentes; plus, tous les produits cinq à cinq, et ainsi de suite; et la somme des seconds est égale à l'unité, moins tous les produits deux à deux des tangentes; plus, tous les produits quatre à quatre, et ainsi de suite. Par conséquent la tangente de la somme de tant d'arcs qu'on voudra, sera égale à la somme des tangentes, moins tous les produits trois à trois de ces tangentes; plus, tous les produits cinq à cinq, et ainsi de suite, divisés par l'unité, moins tous les produits deux à deux de ces tangentes; plus, tous les produits quatre à quatre, et ainsi de suite. On voit encore par ce qui précède, 1°. que le sinus de la

somme d'un nombre quelconque d'arcs est égale à la somme des produits de chaque sinus par le produit des cosinus des autres arcs, moins les produits trois à trois des sinus des arcs par les cosinus des autres arcs, plus tous les produits cinq à cinq de ces mêmes sinus multipliés respectivement par les cosinus des autres arcs, et ainsi de suite; 2°. que le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs est égal au produit des cosinus de ces arcs, moins les produits deux à deux des sinus par les produits des cosinus des autres; plus, la somme des produits quatre à quatre des sinus de ces arcs par les produits des cosinus des autres arcs, et ainsi de suite. Si dans la première formule, ainsi que dans les deux autres, on suppose que tous les arcs soient égaux entr'eux et à  $a$ , on aura celles qui donnent les tangentes sinus et cosinus des arcs multiples, et coïncideront avec celles que Jean Bernoulli a données le premier.

*Quadrature de la Parabole, de la Cycloïde et de la Logarithmique, par la considération des infiniment petits;*

Par M. de STAINVILLE.

*Quadrature de la Parabole. (Pl. 2.)*

Soit  $MAN$  un segment de parabole (fig. 1, pl. 2): si par le point  $P$ , milieu de  $MN$ , on mène la droite  $PA$  parallèle à l'axe, elle sera un diamètre et divisera toutes les droites parallèles à  $MN$ , et par conséquent l'aire du segment  $MAN$  en deux parties égales. Si par le point  $M$  on mène la tangente  $MT$ , on aura  $AT = AP$ . Si par tout autre point  $m$  de cette courbe on mène une ordonnée  $mp$  au diamètre  $AP$ , et une tangente  $mt$  à la même courbe, on aura  $At = Ap$ , ainsi  $Tt = Pp$ . Si on suppose que le point  $m$  soit infiniment près du point  $M$ , le triangle élémentaire  $MtP$  sera la moitié du parallélogramme élémentaire  $MPpm$ , puisque les bases et les hauteurs sont égales; par conséquent la somme des triangles élémentaires qui composent le triangle mixtiligne  $MAT$ , sera la moitié de celle des parallélogrammes élémentaires qui composent le demi-segment de parabole, dont il résulte que le demi-segment parabolique est les deux tiers du triangle  $MPT$  fait sur l'ordonnée et la soutangente; ou ce qui revient au

même, les deux tiers du parallélogramme fait sur l'abscisse et l'ordonnée : le demi-segment inférieur  $APN$  étant égal au supérieur  $APM$ , il s'ensuit que le segment total  $MAN$  est les deux tiers du parallélogramme circonscrit.

### *Quadrature de la Cycloïde.*

Par le point le plus élevé de la cycloïde menons une parallèle à sa base, qui soit terminée par les perpendiculaires élevées aux extrémités de cette base, on aura un rectangle  $ACML$  (fig. 2) dont la base sera égale à la circonférence du cercle générateur, et dont la hauteur sera égale au diamètre de ce même cercle ; par conséquent l'aire de ce rectangle sera quadruple de celle du cercle générateur. Cela posé, si par deux points  $G$  et  $H$  pris sur la cycloïde, on mène des tangentes à cette courbe, que par les mêmes points on mène des parallèles à la base jusqu'à la rencontre du cercle  $DEBD$ , et que l'on tire les cordes  $DE$ ,  $DF$ , elles seront respectivement égales et parallèles à  $GK$  et  $HI$  ; par conséquent si les points  $G$  et  $H$  sont infiniment près, le triangle élémentaire  $IHK$  est égal au secteur élémentaire  $EDF$  ; ainsi la somme de tous les triangles élémentaires qui composent l'aire du triangle mixtiligne  $ALD$  sera égale à celle de tous les petits secteurs élémentaires qui composent le demi-cercle  $DEB$ . Le triangle mixtiligne  $DCM$  étant égal au demi-cercle  $DNB$ , il en résulte que les deux triangles mixtilignes  $ALD$ ,  $CMD$ , équivalent au cercle  $DEBND$  ; si on les retranche du rectangle  $ACML$ , qui est quadruple du cercle  $DEBND$ , il restera, pour l'aire de la cycloïde, le triple de l'aire du cercle générateur.

### *Quadrature de la Logarithmique.*

Soient  $M$  et  $m$  (fig. 3) deux points de cette courbe que nous supposerons infiniment près l'un de l'autre ; si par l'un et l'autre de ces points on mène des tangentes à la courbe et des ordonnées à l'axe  $PX$  qui en est l'asymptote, on aura, en vertu des propriétés de cette courbe  $PT = pt$  ; cela posé, les points  $M$  et  $m$  étant infiniment près, le petit arc  $Mm$  se confond avec la tangente au point  $m$ . Si par le point  $T$  on mène  $To$  parallèle à  $mt$ , et  $TK$  parallèle aux ordonnées, on aura un parallélogramme  $KToM$ , qui sera divisé par la diagonale  $MT$  en deux, également ; par conséquent le triangle  $MTo$  est égal au triangle  $MTK$ , et comme celui-ci ne diffère de  $MTt$  que du triangle  $TtK$  qui est infiniment petit par rapport à  $MTt$ , on aura  $MTo = MTt$ . Si par un autre point  $m'$  infiniment près de  $m$ , on mène une tangente  $m't'$ .

à la courbe , et que par le point  $T$  on lui mène une parallèle  $To'$ , on aura l'espace  $mtt'm'm$  égal au triangle  $Too'$ , et ainsi de suite; par conséquent l'espace total compris entre la courbe, l'asymptote et la tangente, est égal à la somme de tous les triangles élémentaires dont se compose le triangle  $MPT$ , c'est-à-dire au triangle lui-même; si à cet espace on ajoute le triangle  $MPT$ , on aura pour l'espace total compris entre la courbe, une ordonnée et l'asymptote, un espace double de l'aire du triangle fait sur l'ordonnée et la soutangente, et par conséquent égale au parallélogramme fait sur la sous-tangente et l'ordonnée.

Si on veut avoir la portion de l'aire comprise entre la courbe, deux ordonnées quelconques et la partie de l'asymptote comprise entre ces deux ordonnées, il est facile de voir qu'on l'obtiendra en construisant un parallélogramme qui auroit pour côtés contigus, la soutangente et la différence des ordonnées.

Il est aussi facile de voir que la portion de l'aire terminée par une portion de la courbe, les tangentes menées à ses extrémités et l'asymptote est égale au triangle formé avec les tangentes menées aux extrémités de l'arc et dont l'angle compris seroit celui que ces deux tangentes font entr'elles.

#### *Evaluation d'un segment de paraboloides.*

Par le point le plus éloigné de la base du segment, concevons une droite parallèle à l'axe de révolution, et par un point de cette droite, située dans l'intérieur de ce segment et à une distance infiniment petite de la base, concevons un plan qui lui soit parallèle: on aura une tranche infiniment mince, dont le volume se confondra avec le cylindre qui auroit pour base celle du segment, et pour hauteur l'épaisseur de la tranche; cela posé, si on conçoit un cône dont le sommet soit sur le diamètre  $AP$  de l'autre côté de l'origine, à une distance  $At = AP$  (fig. 1), et qui ait même base que le segment de paraboloides, il sera tangent à la surface de révolution, puisque les intersections du cône, par les plans conduits suivant le diamètre  $AP$ , sont tangentes aux paraboles qui sont les intersections de ce même plan avec la surface du paraboloides. Si on prend ensuite  $At = Ap$ , le point  $t$  sera le sommet d'un cône dont la surface sera le prolongement de la petite zone élémentaire, comprise entre les deux plans infiniment rapprochés, et la différence des cônes qui est la partie du solide comprise entre les deux surfaces coniques, sera égale à la base commune multipliée par le tiers de la différence des hauteurs, et par conséquent sera égale au tiers du petit cylindre élémentaire  $MP$ ,  $pm$ , qui lui correspond dans le

segment de paraboloïde ; ainsi la somme des petits volumes élémentaires compris entre les surfaces coniques infiniment voisines et ayant leur centre sur le diamètre  $TP$ , est le tiers de la somme des cylindres élémentaires correspondant dans le segment de paraboloïde ; d'où il résulte que le solide extérieur au segment est contenu trois fois dans ce segment, et par suite quatre fois dans le cône circonscrit : le segment de paraboloïde est donc les trois quarts de ce cône ; et comme ce cône est les deux tiers du cylindre circonscrit à ce segment, puisqu'il a même base et une hauteur double, il en résulte que ce segment de paraboloïde est les  $\frac{3}{4}$  des  $\frac{2}{3}$  du cylindre circonscrit, ou ce qui revient au même la moitié de ce même cylindre.

Si on vouloit avoir le centre de gravité d'un segment de paraboloïde, il faudroit le concevoir décomposé en tranches infiniment minces, d'égale épaisseur, et parallèles à la base : le centre de gravité de chacune d'elles se trouvant sur la droite menée par le sommet du segment parallèlement à l'axe de révolution, le centre de gravité du segment s'y trouvera aussi, et comme les intensités des forces appliquées aux différens points de cette droite varieront dans le rapport des carrés des ordonnées d'une section faite suivant le diamètre, et par conséquent dans le rapport de leur distance au sommet, il s'ensuit que le centre de gravité se trouvera aux deux tiers du diamètre à partir de l'origine, puisque le centre de gravité d'une droite aux différens points de laquelle on applique des forces proportionnelles aux distances de ces mêmes points, à l'une des extrémités, peut être considéré comme le centre de gravité d'un triangle dont la base seroit divisée par une des extrémités en deux parties égales, et dont le sommet seroit placé à l'autre extrémité.

---

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

---

*Problème.* — Etant donnée une surface de révolution engendrée par une courbe quelconque, et un cône dont la trace sur le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, soit aussi une courbe quelconque, trouver leur intersection en n'employant que la ligne droite et le cercle.

*Solution*, par M. OLIVIER, Elève.

On coupe les deux surfaces données par une suite de cônes auxiliaires, qui ont même sommet que le cône donné, et qui

ont pour bases des cercles de la surface de révolution. L'un de ces cônes auxiliaires, prolongé jusqu'au plan de la base du cône donné, a pour trace, sur ce plan, un cercle. Les points d'intersection de ce cercle et de la base du cône donné déterminent des arêtes communes à ce dernier cône et au cône auxiliaire. Une quelconque de ces arêtes passe par un point du cercle qui est à-la-fois sur la surface de révolution, sur le cône auxiliaire, et sur le cône donné; d'où il suit que ce point est sur la courbe d'intersection des deux surfaces données.

Je me propose de déterminer les cônes auxiliaires limites, c'est-à-dire ceux qui passent par les cercles de la surface de révolution, entre lesquels sont comprises les différentes branches de la courbe d'intersection cherchée.

Si la trace du cône auxiliaire ne coupe pas celle de la surface conique donnée, il n'y aura aucun point de la courbe situé sur le cercle appartenant à-la-fois au cône auxiliaire et à la surface de révolution.

Si au contraire ces deux traces se coupent, il y aura sur ce cercle autant de points de la courbe qu'il y aura de points communs aux deux traces.

Les cercles limites seront donc ceux qui ne contiendront qu'un seul point de la courbe; ils seront évidemment placés sur les cônes auxiliaires dont les traces seront tangentes à celle de la surface conique donnée; et ces derniers seront les cônes limites.

Pour déterminer les centres des cercles, traces de ces cônes limites, nous emploierons la construction suivante :

(Pl. 2, fig. *a* et *b*.) Tous les cercles, bases des cônes auxiliaires, ont leurs centres sur la trace horizontale  $O'S'$  (fig. *a*), du plan vertical passant par le sommet  $S, S'$  des cônes auxiliaires, et par l'axe  $O', O''$  de la surface de révolution. Si de tous les points de la courbe  $ABCD$ , trace de la surface conique donnée, on mène des normales à cette courbe, chacune des normales coupera la droite  $O'S'$  (fig. *a*) en un point qui est le centre d'un cercle, trace de l'un des cônes auxiliaires. Le rayon de ce cercle étant connu, on le portera sur la normale, à partir du point de la courbe par lequel on a élevé cette normale; l'extrémité de ce rayon appartient à une courbe  $mn, m'n'$  (fig. *a*) qui coupe la droite  $O'S'$  aux points  $F, G, \dots$ , centres des cercles, qui touchent la trace  $ABCD$  du cône donné. Ces cercles sont évidemment les bases des cônes auxiliaires limites.

Ayant déterminé les cônes auxiliaires limites, il sera facile de trouver les cercles limites, situés sur la surface de révolution.

Ce problème (proposé cette année 1812, par M. Arago) étant résolu, on appliqueroit utilement cette solution à la détermination des ombres, dans le cas, par exemple, où l'on deman-

deroit l'ombre portée par une courbe donnée sur une surface de révolution, les rayons lumineux partant d'un seul point.

Lorsque ces rayons sont parallèles entr'eux, l'ombre d'une courbe sur une surface de révolution est la ligne d'intersection de cette surface et d'un cylindre qui a pour base la courbe donnée, et dont les arêtes sont parallèles.

Pour trouver cette ligne on coupe les deux surfaces par une suite de cylindres qui ont pour bases des cercles de la surface de révolution, et pour arêtes des droites parallèles aux rayons de la lumière.

C'est ainsi que dans l'épure du *vase* (leçons de M. Hachette, sur les ombres) on détermine l'ombre portée sur ce vase, par le cercle qui termine sa surface. Cette méthode n'est pas particulière aux surfaces de révolution; elle s'appliqueroit avec les mêmes avantages dans le cas où il s'agiroit de trouver l'intersection d'un cône et d'une surface engendrée par une courbe plane, mobile, constante de forme, et dont le plan ne changeroit pas de direction.

## QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE,

*Proposées au Concours général des Lycées de Paris,  
année 1812.*

MM. Giorgini et Duchayla, élèves admis cette année à l'Ecole Polytechnique, ont remporté, l'un le premier prix de mathématiques, et l'autre le premier prix de physique.

### *Physique.*

Exposer la théorie de la réfraction de la lumière.

### *Mathématiques. — Question de Géométrie.*

Etant donné un quadrilatère *ABCD* (fig. 1, pl. 3), dont les quatre côtés ne sont pas situés dans un même plan, on demande  
1°. L'équation de la surface engendrée par le mouvement

d'une droite  $MN$ , qui s'appuie sur les deux côtés  $CB$ ,  $AD$  du quadrilatère, de manière que l'on ait la proportion  $DN : NA :: CM : MB$ .

2°. L'équation d'une seconde surface engendrée par une droite  $IK$ , qui s'appuie sur les deux côtés opposés  $AB$ ,  $DC$  du quadrilatère avec la condition  $CK : KD :: BI : IA$ .

3°. On demande de plus si ces deux surfaces sont différentes ou si elles sont coïncidentes?

*Solution de la question de Géométrie,*

Par M. GIORGINI.

*Première solution (analytique).*

Suivant les côtés adjacents  $AB$ ,  $AD$  (fig. 1, pl. 3), conduisez le plan des  $zy$ ; par le côté  $AB$ , le plan des  $zx$  parallèle au côté opposé  $CD$ ; enfin, par le côté  $AD$ , celui des  $yx$ , parallèle au côté opposé  $BC$ , et soient représentées par

$$z = \gamma, y = \zeta, x = \alpha$$

les coordonnées du point  $C$ , on aura

$$\text{en } A \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad \text{en } B \begin{cases} x=\gamma \\ y=0 \\ x=0 \end{cases}, \quad \text{en } D \begin{cases} y=\zeta \\ z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

et le cours des côtés du quadrilatère sera représenté par les équations

$$AB. \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad AD. \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad BC. \begin{cases} z=\gamma \\ y=\frac{\zeta}{\alpha}x \end{cases} \quad DC. \begin{cases} y=\zeta \\ x=\frac{\alpha}{\gamma}z \end{cases}$$

Cela posé, si nous supposons  $AN = y'$ , les équations de la génératrice  $MN$  seront de la forme

$$\begin{aligned} x &= Bz \\ y &= Az + y', \end{aligned}$$

et si nous éliminons  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , entre les équations de la géné-

ratrice  $MN$  et celles du côté  $BC$ , nous aurons, pour exprimer que  $MN$  s'appuie constamment sur  $BC$ , l'équation de condition

$$(a) \dots B \gamma \zeta = a (A \gamma + \gamma').$$

De plus, par hypothèse, l'on a

$$\frac{ND}{NA} = \frac{CM}{MB}, \text{ ou bien } \frac{AD}{AN} = \frac{BC}{BM};$$

au point  $C$ ,  $\gamma = \zeta$ , et au point  $M$ ,  $z = \gamma$ ,  $\gamma = A \gamma + \gamma'$ , nous aurons donc

$$\frac{BC}{BM} = \frac{\zeta}{A \gamma + \gamma'} = \frac{AD}{AN} = \frac{\zeta}{\gamma'}, \text{ ou bien } A \gamma = 0,$$

d'où il résulte, puisque  $\gamma$  n'est pas généralement nul, que  $A=0$ , et par conséquent que l'équation de condition (a) devient

$$B \gamma \zeta = a \gamma';$$

or, des équations de la génératrice, on tire  $B = \frac{x}{z}$  et  $\gamma' = \gamma$ ; l'équation de la surface demandée sera donc

$$(1) \dots \gamma \zeta x = a \gamma z.$$

Nous avons ainsi satisfait à la première partie de la question; voici ce qui résout les deux secondes :

Pour avoir l'équation de la surface engendrée par la seconde droite  $IK$ , il est clair que les calculs seroient absolument les mêmes, considérant seulement, au lieu des côtés  $AD$ ,  $BC$ , les côtés  $AB$ ,  $CD$ , et par suite changeant  $\zeta$  et  $\gamma$  en  $\gamma$  et  $z$ , et réciproquement. Et pour avoir donc l'équation de la seconde surface, il suffira de faire ces changemens dans l'équation de la première; or, l'équation (1) est symétrique par rapport à  $\zeta$  et  $\gamma$ , et par rapport à  $\gamma$  et  $z$  : cette équation est donc également celle des deux surfaces : ces deux surfaces n'en font donc qu'une, et sont coïncidentes.

#### *Discussion.*

Reprenons l'équation de la surface  $\gamma \zeta x = a \gamma z$ , et cherchons les sections de cette surface par un plan; 1°. parallèle à celui des  $\gamma$ ,  $x$ ; 2°. parallèle à celui des  $z$ ,  $x$ . Le premier ayant

pour équation  $z = k$ , nous donne pour section la droite

$$z = k, \gamma \zeta x = \alpha k \gamma,$$

le second ayant pour équation  $\gamma = k$ , la section qu'il fera sur la surface, sera la droite

$$\gamma = k, \gamma \zeta x = \alpha k z.$$

D'où il résulte que notre surface peut être engendrée de deux manières différentes par une droite, qui se meut s'appuyant sur deux autres, et assujettie à être constamment parallèle à un même plan; nous sommes donc en droit de conclure que cette surface est un *paraboloïde hyperbolique*.

Quant aux sections de la surface par des plans parallèles à celui des  $\gamma, z$ , c'est-à-dire à celui des deux côtés  $AB, AD$ , il est clair que l'équation de l'un de ces plans étant généralement  $x = c$ , celles de la section seront

$$x = c, \alpha \gamma z = \gamma \zeta c,$$

d'où il résulte que ces sections sont des hyperboles rapportées à leurs asymptotes, et que, par conséquent, les plans des  $x, z$ , et celui des  $x, \gamma$ , sont des plans asymptotiques de la surface; on aura donc un système de plans asymptotiques, en conduisant, suivant deux côtés adjacens, des plans parallèles aux côtés qui leur sont respectivement opposés.

Supposons actuellement qu'au lieu de prendre le point  $\alpha, \zeta, \gamma$ , pour l'un des sommets du quadrilatère, l'on prenne un autre point placé sur la surface d'une manière quelconque, c'est-à-dire, tel que  $\alpha', \zeta', \gamma'$ , étant ses coordonnées, l'on ait la relation

$$\alpha \zeta' \gamma' = \gamma \zeta \alpha';$$

alors, considérant la surface engendrée d'après le même mode de génération, en faisant usage de ce second quadrilatère, son équation sera

$$\gamma' \zeta' x = \alpha' \gamma z,$$

et cette seconde surface aura, pour plans asymptotiques, ceux menés suivant les côtés du quadrilatère qui passent par le point  $\alpha', \zeta', \gamma'$ , parallèlement aux côtés opposés, c'est-à-dire, aux plans des  $x, \gamma$  et des  $x, z$ : or, puisque

$$\zeta' \gamma' = \frac{\gamma \zeta \alpha'}{\alpha}$$

l'équation de la seconde surface devient

$$\gamma \zeta x = a y z;$$

c'est-à-dire, que cette seconde surface est la même que la première, et que, par suite, tous les systèmes de plans menés suivant deux génératrices de la surface parallèlement aux deux côtés opposés du quadrilatère, seront un système de plans asymptotiques.

Nous avons démontré que la génération de notre surface étoit la même que la génération du paraboloid hyperbolique; il s'ensuit donc de nos dernières considérations le théorème suivant :

Que tout paraboloid hyperbolique admet une infinité de plans asymptotiques, qui rencontrent chacun la surface suivant l'une de ses génératrices, et sont respectivement parallèles aux plans directeurs auxquels chaque génératrice est parallèle.

*Deuxième solution (géométrie).*

Tous les résultats obtenus précédemment par l'analyse peuvent également se démontrer par de simples considérations de triangles, comme nous allons le faire voir.

Concevons pour cela que, conservant la même disposition d'axes que précédemment, on conduise, suivant les deux côtés  $CB, CD$  (fig. 2), un plan, dont  $DR, BR$  soient les traces sur les deux plans des  $\gamma, x$  et des  $z, x$ ; le plan des  $\gamma, x$  étant parallèle au côté  $CB$ , la trace  $DR$  sera parallèle à ce côté; par la même raison,  $BR$  sera parallèle à  $CD$ , et la figure  $CDRB$  sera un parallélogramme. Si donc on mène dans le plan de ce parallélogramme, la ligne  $ME$  parallèle à  $BR$ , on aura  $CM = DE$ ,  $MB = ER$ , et par conséquent  $DN : NA :: DE : ER$ . D'où il résulte que la ligne  $NE$  est parallèle à  $AR$ , et le plan  $MEN$  parallèle au plan  $BRA$  ou à celui des  $z, x$ ; la génératrice  $MN$ , située dans le plan  $MEN$ , sera donc constamment parallèle au plan des  $z, x$ ; d'où il résulte d'abord que la surface demandée est un paraboloid hyperbolique.

Cherchons actuellement l'équation de la surface, et, pour cela, considérons un point quelconque  $G$  (fig. 2), situé sur la génératrice  $MN$ ; soient  $z, x, \gamma$ , les trois coordonnées  $GP, PN, NA$  de ce point;  $CS, SD, DA$ , celles du point  $C$ ;  $ML, LN, NA$ , celles du point  $M$ , nous aurons

$$\frac{ML}{GP} = \frac{LN}{PN}, \text{ ou bien } \frac{\gamma}{z} = \frac{LN}{x}, \quad \frac{LN}{SD} = \frac{NA}{DA},$$

d'où l'on tire

$$LN = \frac{SD.NA}{DA} = \frac{ay}{c};$$

et par suite, substituant, nous aurons

$$c y x = a y z,$$

pour l'équation de la surface demandée : ce résultat est conforme à celui que nous avons obtenu précédemment.

La coïncidence des deux surfaces peut également se démontrer sans faire usage d'aucune équation.

En effet, conservons la même construction que précédemment, et de plus, conduisons dans le plan du parallélogramme,  $KF$  parallèle à  $CB$ ,  $IF$  sera parallèle à  $AR$ , par la même raison que  $NE$  est parallèle à  $AR$ ; les deux plans  $KFI$ ,  $MEN$ , respectivement parallèles à ceux des  $y, x$  et des  $z, x$ , se couperont suivant une certaine droite  $GH$ , parallèle à  $IF$ ,  $NE$  et  $AR$ . Si donc nous parvenons à démontrer que le point où  $GH$  rencontre la génératrice  $MN$ , est le même que celui où  $GH$  rencontre  $KI$ , il sera démontré que les génératrices  $KI$  et  $MN$  se rencontrent en un même point, et que, par conséquent, une génératrice quelconque de l'une des deux surfaces rencontre toutes celles de la seconde surface,  $y$  est située, et que les deux surfaces sont coïncidentes.

Or, si nous regardons le point  $G$  comme celui où  $GH$  rencontre  $MN$ , les triangles  $MGH$ ,  $MNE$  semblables, donneront

$$GH = \frac{NE \times MH}{ME},$$

or,  $MH = CK$ ,  $ME = CD$ , et les triangles  $DNE$ ,  $DAR$  semblables, donnent

$$NE = \frac{DN \times AR}{DA};$$

nous aurons donc

$$GH = \frac{DN \cdot CK \cdot AR}{CD \cdot DA}$$

Supposons actuellement que le point  $G$  soit celui d'intersection de la droite  $GH$  avec  $KI$ , nous aurons dans les triangles  $KGH$ ,  $KIF$  semblables.

$$GH = \frac{IF.KH}{KF} = \frac{IF.DE}{DR} = \frac{IF.DN}{DA},$$

et dans les triangles  $BIF, BAR$

$$IF = \frac{BI.AR}{BA} = \frac{CK.AR}{CD},$$

er par suite

$$GH = \frac{DN.CK.AR}{DA.CD}.$$

D'où il résulte que, à partir du point  $H$ , la ligne  $GH$  est rencontrée à la même distance par la ligne  $KI$  et par la ligne  $MN$ ; et que par suite, ces deux génératrices se rencontrent au même point  $G$ , ce qu'il falloit démontrer (\*).

(\*) M. Monge, après avoir donné quelques momens à l'examen de cette question, avoit trouvé une solution qui ne diffère de celle de M. Giorgini, que par la manière dont elle est présentée. Il suppose qu'étant donné un quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les quatre côtés ne sont pas dans le même plan, on le divise en deux triangles par une diagonale; il considère ces deux triangles comme les moitiés de deux parallélogrammes, et ces deux parallélogrammes comme les sections faites dans un parallélipède par deux plans qui ont pour intersection commune la première diagonale du quadrilatère donné. La seconde diagonale de ce quadrilatère le divise encore en deux triangles, dont chacun est moitié de deux autres parallélogrammes, et on fait voir que les quatre parallélogrammes sont des sections d'un parallélipède, dont les plans passent deux à deux par la même diagonale du quadrilatère. On obtiendrait ce même parallélipède, en menant par les côtés opposés du quadrilatère, des plans parallèles à ces côtés: deux de ces plans seroient nécessairement parallèles entre eux, et contiendroient les faces parallèles (parallélipède).

Soit (fig. 3, pl. 3)  $ABCD$  le quadrilatère donné. (Pour faciliter la comparaison de la fig. 3 aux figures précédentes 1, 2, de M. Giorgini, on désigne par les mêmes lettres; les points communs à ces trois figures.)

Ayant mené les diagonales  $AC$  et  $BD$ , on construit 1°. les parallélogrammes  $ABCS, ACDd$ , dont les plans passent par

## THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE,

Par M. CHASLES, Elève.

Si on divise deux côtés opposés (fig. 1, pl. 3)  $AB$ ,  $CD$ , d'un quadrilatère gauche  $ABCD$  en des points  $I$  et  $K$ , tels qu'on ait  $\frac{AI}{BI} = a \cdot \frac{DK}{CK}$ ,  $a$  étant un nombre donné; la droite  $IK$  engendrera la surface du second degré qu'on nomme *hyperboloïde à une nappe*.

*Démonstration.* — Je mène une droite  $MN$ , qui divise les

la diagonale  $AC$ ; 2°. les parallélogrammes  $ABDa$ ,  $BCDR$ , dont les plans passent par la diagonale  $BD$ . Ces quatre parallélogrammes sont des sections d'un parallépipède  $XY$ ,  $XY'$ . La direction des arêtes du parallépipède est déterminée par les droites telles que  $AR$ ,  $aC$  ou  $Bd$ ,  $DS$  qui joignent les sommets de deux parallélogrammes dont les plans passent par la même diagonale du quadrilatère. Les plans des triangles  $KIF$  ou  $KGH$ ,  $MNE$  ou  $MGH$ , sont parallèles aux arêtes du parallépipède, et coupent les faces de ce solide suivant des droites parallèles à ses arêtes.

Considérant à-la-fois le prisme et les quatre parallélogrammes, dont les plans passent par les diagonales  $BD$ ,  $AC$ , on voit que les plans des triangles  $KIF$ ,  $MNE$ , contiennent deux autres triangles  $KIk$ ,  $MNm$ , dont les plans se coupent suivant une droite  $GH'$  parallèle aux arêtes du parallépipède.

La comparaison des triangles  $IKk$ ,  $IGH'$ , donneroit pour  $GH'$  une valeur qui ne différeroit pas de celle qu'on trouveroit en comparant les triangles  $NMm$ ,  $NGH'$ ; d'où l'on déduiroit, par un raisonnement semblable à celui de M. Giorgini, que les deux droites  $KI$ ,  $MN$  se coupent en un point  $G$ . (*Voyez une autre démonstration de ce théorème, Géométrie de M. Legendre, neuvième édition, page 147, proposition XVI.*)

Les plans  $KIFk$ ,  $MNEm$  coupant la diagonale  $BD$  aux points  $z$  et  $z'$ , les droites  $KF$ ,  $Ik$ , se croisent au point  $z$ , et les droites  $ME$ ,  $Nm$ , au point  $z'$ . (*Fin de la note.*)

côtés opposés  $AD, BC$ , en des points  $N, M$ , de manière qu'on ait  $\frac{AN}{DN} = a \cdot \frac{BM}{CM}$ , les deux droites  $LK, MN$ , se couperont en un point  $G$ , car si on élimine  $a$  entre les deux équations précédentes, on obtiendra

$$AI \times BM \times CK \times DN = AN \times DK \times CM \times BI;$$

ce qui prouve (*Théorie des Transversales*, par M. Carnot, page 70) que les quatre points  $I, K, M, N$ , sont sur un même plan. Ainsi les deux droites  $IK, MN$ , se couperont en un point  $G$ . D'après cela, si on suppose  $MN$  fixe, la droite  $IK$  s'appuiera constamment sur les droites  $AB, CD, MN$ ; donc elle engendrera une surface du second degré. Mais la droite  $MN$  n'est pas située dans un plan parallèle aux deux droites  $AB, CD$ , puisque sa position, à partir du point  $M$ , dépend de la constante donnée  $a$ ; donc cette surface du second degré est un hyperboloïde à une nappe.

Faisant mouvoir la droite  $MN$ , elle engendrera un second hyperboloïde qui se confondra avec le premier, puisqu'une droite  $IK$  de l'un coupe toutes les génératrices  $MN$  de l'autre.

Lorsque  $a=1$ , l'hyperboloïde devient un paraboloides hyperbolique.

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

*Du Dessin de la Vis triangulaire, éclairée par des rayons de lumière qu'on suppose parallèles entr'eux.*

Suite de l'article (page 13 de ce volume) *Application de la théorie des Ombres au dessin des Machines*, par M. HACHETTE.

Dans l'article cité, page 13 de ce volume, on a eu principalement pour objet de discuter la courbe de séparation d'ombre et de lumière sur les filets d'une vis triangulaire. Pour compléter l'explication du dessin de cette vis, nous aurons égard aux parties accessoires, telles que la tête de la vis, un écrou...; nous supposerons la forme de la vis, déterminée par les projections horizontale et verticale de l'épure  $A$  (pl. 4). Nous indiquerons, par une légende, les données de cette épure, et les lignes à construire. Parmi ces lignes, on distinguera les courbes limites de la projection verticale des surfaces supérieure et inférieure des filets, et les lignes de séparation d'ombre et de lumière. Nous

construirons ces courbes par la considération du paraboloïde hyperbolique tangent à la surface du filet. Quant aux autres lignes, qu'on trouve par l'application des méthodes connues, on se contentera d'indiquer, dans la légende, les surfaces dont elles sont les intersections.

*Explication de l'Epure A (pl. 4).*

Les données de cette Epure sont. 1°. un cercle (fig. 1) du rayon  $AB$ , projection horizontale du noyau de la vis qu'on suppose vertical; 2°. un cercle du rayon  $AC$ , base du cylindre qui contient l'hélice commune aux surfaces supérieure et inférieure des filets; 3°. un cercle du rayon  $AD$ , projection horizontale de la tête de la vis, dont la hauteur est  $as$ , ou  $vd$  (fig. 2); 4°. la droite génératrice  $CB$  (fig. 1),  $cb$  (fig. 2) de la surface supérieure des filets de la vis. Cette droite prolongée coupe l'axe du noyau de la vis au point  $A$  (fig. 1),  $a$  (fig. 2), et fait avec cet axe un angle constant  $caa'$ . La droite génératrice de la surface inférieure des filets, menée par le point  $c$  (fig. 2), feroit avec l'axe vertical  $aa'$ , un angle égal au premier  $caa'$ ; le sommet de cet angle seroit au-dessous de l'horizontale  $ca'$ , et à une distance de cette horizontale égale à la verticale  $aa'$ ; 5°. enfin l'écrou compris entre les deux plans horizontaux  $\epsilon\zeta$ ,  $\eta\theta$ .

D'après ces données, on demande d'abord *le contour de la projection verticale des filets de la vis*. Un plan vertical tel que  $AB$  (fig. 1), parallèle au plan vertical de projection (fig. 2), couperoit les filets de la vis suivant un système de lignes droites parallèles aux génératrices de ces filets; mais les projections verticales de ces droites ne forment pas le contour de la projection verticale des filets. Pour obtenir la ligne limite de cette projection, il faut concevoir les surfaces supérieure et inférieure des filets de la vis, enveloppées par deux cylindres dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de projection. L'intersection de ces cylindres, par le plan vertical de projection, est la ligne demandée. Si l'on observe que cette ligne doit être tangente aux projections verticales de toutes les hélices, on en conclura qu'elle est nécessairement courbe; car, si elle étoit droite, elle couperoit l'axe du noyau de la vis; ce qui est impossible, puisqu'elle doit toucher cet axe qui peut être considéré comme une hélice de la surface de la vis, tracée sur un cylindre dont la base est réduite à zéro.

Pour tracer la courbe limite de la projection verticale des filets de la vis, reprenons la planche 2 du premier cahier de ce volume, qu'on a réimprimée pour ce 5°. cahier. Soient  $AB'$ ,  $ab'$  (planche 2, cahiers 2°. et 5°.), les projections horizontale et verticale de la génératrice de la surface supérieure du filet,

Nous avons démontré (supplément de la géométrie descriptive, art. 61, pag. 62), 1°. que cette surface étoit l'enveloppe de l'espace que parcourt une paraboloïde hyperbolique de forme constante; 2°. que la droite génératrice de ce paraboloïde avoit pour directrices les tangentes à trois hélices, parallèles au plan vertical tel que  $B'N$ , perpendiculaire à la projection horizontale  $AB'$  de la droite commune à la surface du filet et au paraboloïde. Considérant l'axe  $A, A'a$ , comme l'un des tangentes directrices, soient  $B'N, \alpha\beta$  les projections horizontales des deux autres tangentes. Connoissant le pas de l'hélice décrite par un point quelconque de la génératrice  $AB'$ ,  $ab'$ , on trouve facilement l'angle que les tangentes font avec le plan horizontal, et tout ce qui est relatif au premier mode de génération du paraboloïde, est bien connu. Déterminons maintenant le second mode de génération. Tout plan vertical, tel que  $A\beta N$ , passant par l'axe  $A, A'a$ , contiendra une droite du paraboloïde, appartenant au premier mode de génération. Nommons cette droite  $D$ . La droite  $D$  passera par les deux points, dont  $N$  et  $\beta$ , extrémités des droites  $B'N, \alpha\beta$ , sont les projections horizontales; or, la différence des ordonnées verticales de ces deux points est égale à la différence des ordonnées verticales, qui correspondent aux deux points  $B', \alpha$ ; d'où il suit que la droite  $D$ , dont la projection horizontale est  $AN$ , se projettera sur le plan vertical, suivant une droite telle que  $nD$ , parallèle à  $b'a$ . Quelle que soit la position de la génératrice du paraboloïde, dans le premier mode de génération, pour lequel les trois directrices sont parallèles au plan vertical  $B'N$ , cette génératrice se projettera sur le plan vertical suivant une parallèle à la droite  $ab'$ , et sur le plan horizontal, suivant une droite passant par le point  $A$ ; d'où il suit que dans le second mode de génération, la droite génératrice est constamment parallèle au plan vertical  $B'N$ , et les trois directrices sont parallèles à un plan qui auroit pour trace sur le plan vertical la droite  $ab'$ , et qui seroit perpendiculaire à ce plan vertical. Les deux plans auxquels la génératrice du paraboloïde est parallèle dans les deux systèmes de génération, ayant pour intersection une droite horizontale, tout plan horizontal coupe ce paraboloïde suivant une parabole (*Supplément de la Géométrie descriptive*, art. 83, pag. 73).

Connoissant la double génération du paraboloïde qui touche la surface du filet suivant une droite donnée, on trouvera, de la manière suivante, un point de la courbe qui termine la projection verticale de cette surface. On portera sur  $B'N$ , perpendiculaire à  $AB'$ , le développement d'une portion de la circonférence du rayon  $AB'$ , par exemple, moitié de cette circonférence, et on joindra les points  $N$  et  $A$  par une droite. Portant au-dessous

du point  $N$  une ordonnée verticale, égale à la moitié du pas de l'hélice décrite par le point  $(B', b')$ , l'extrémité de cette ordonnée sera un point de la droite qui touche l'hélice au point  $(B', b')$ . Prenant sur la verticale  $b'B'$ , une droite  $b'n$ , égale à la moitié du pas de l'hélice, le point  $n$  sera la projection verticale du point  $N$ . Menant la parallèle  $nD$  à  $b'a$ , les droites  $nD$ ,  $AN$  sont les projections verticale et horizontale d'une génératrice du paraboloidé qui touche la surface du filet suivant la droite  $AB'$ ,  $ab'$  de cette surface.

Soient  $A\delta$ ,  $\delta\delta'$ , les projections horizontale et verticale d'une droite quelconque de la surface du filet; concevons par cette droite un paraboloidé égal à celui qui touche la surface du filet suivant la droite  $AB'$ ,  $ab'$ , et un plan perpendiculaire au plan vertical. Le point où ce plan, dont la trace horizontale est  $\delta d$ , touche le paraboloidé, appartient à la courbe cherchée. La droite  $A\delta$ , et l'horizontale  $\delta d$ , qui se projette sur le plan vertical en  $\delta'$ , faisant entr'elles l'angle  $A\delta d$ , supposons que ces droites tournent autour du point  $A$ , et viennent coïncider l'une avec  $AB'$ , l'autre avec la droite  $B'e$ , qui coupe la ligne  $AN$  au point  $e$ . Par ce mouvement, l'horizontale  $\delta d$ ,  $\delta'$ , prend la position d'une autre horizontale, qui se projette en  $B'e$ ,  $b'e'$ . Le plan qui passe par cette dernière horizontale et par la droite  $AB'$ ,  $ab'$ , touche le paraboloidé tangent à la surface du filet suivant cette même droite, en un point qu'il s'agit de déterminer. Pour construire ce point, observons que le plan vertical  $AN$  coupe la droite de la surface du filet au point  $A$ ,  $a$ , et l'horizontale  $B'e$ ,  $b'e'$ , au point  $e$ ,  $e'$ . Or, la droite  $ae'$  coupe la droite  $nD$  au point  $\lambda$ ; donc la parallèle  $\lambda\phi\lambda'$  à  $b'n$ , ou à  $A'a$ , coupera les droites  $AB'$ ,  $ab'$ , en des points  $\lambda'$ ,  $\phi$ , qui seront les projections horizontale et verticale du point de contact cherché.

Décrivant du point  $A$ , comme centre, l'arc  $\lambda'\gamma$ , qui coupe la droite  $A\delta$  au point  $\gamma$ , et menant la verticale  $\gamma\epsilon$  qui rencontre la droite  $\delta'\theta$ , au point  $\epsilon$ , les points  $\gamma$  et  $\epsilon$  sont les projections horizontale et verticale d'un point de la courbe cherchée. On trouvera, de la même manière, tant de points qu'on voudra, de la ligne  $\epsilon\mu\epsilon'$ , qui termine la projection verticale de la surface du filet.

Le plan tangent à la surface du filet, qui a pour trace sur le plan vertical, la droite  $\delta'\theta$ , étant perpendiculaire à ce plan vertical, il suit que cette droite touche la courbe  $\epsilon\mu\epsilon'$  au point  $\epsilon$ .

En considérant toutes les nappes de la surface du filet qui ont pour lignes de *striction* l'axe vertical  $A$ ,  $A'a$ , la limite de la projection verticale de la portion de cette surface, qui correspond à une révolution entière de la droite génératrice, est une

courbe composée de deux branches infinies  $\mu\mu'$ ,  $\pi\mu'\pi'$ , tangentes à la droite  $A'a$  aux points  $\mu$  et  $\mu'$ . La distance  $\mu\mu'$  de ces deux points est égale à la moitié du pas de l'hélice, décrite par un point quelconque de la droite qui engendre la surface du filet. Elle a pour asymptote les deux droites  $b'a$ ,  $b''a'$ , projections verticales des génératrices du filet, dont les projections horizontales  $AB'$ ,  $AB$  sont contenues dans un plan vertical  $BB'$ , parallèle au plan vertical de projection. D'où il suit que ces deux asymptotes coupent l'axe  $A'a$  en deux points  $a$ ,  $a'$ , dont la distance  $aa'$  est égale à  $\mu\mu'$ .

Le cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan vertical  $BB'$ , touche la surface du filet prolongée indéfiniment, suivant une infinité de courbes, qui se projettent sur le plan vertical suivant des lignes composées de deux branches égales aux courbes  $\mu\mu'$ ,  $\pi\mu'\pi'$ , et toutes ces lignes de contact se projettent sur le plan horizontal, suivant une courbe unique, composée de deux branches  $FAH$ ,  $LAK$ , qui se touchent au point  $A$ , et qui sont touchées par la droite  $AA'$ , perpendiculaire au plan de la projection verticale. La branche  $FAH$  coupe le cercle du rayon  $AB'$  au point  $F$ . La verticale  $FF'$  coupe la projection verticale de l'hélice décrite par le point  $(B', b')$  en un point  $F'$  de la ligne  $F'\mu'$ . La même branche  $FAH$  coupe au point  $O$ , la tangente  $B'N$  du cercle dont le rayon est  $AB'$ , et à ce point  $O$  correspond en projection verticale un point  $O'$  (au-dessous de  $F'$ ) de la courbe  $O'F'\mu'$ . Pour éviter la confusion qui résulte du voisinage des trois points  $b', F', O'$  (fig. 2, projection verticale), on a construit à part, sur une plus grande échelle, la fig. 3 qui montre la position respective de ces trois points; le premier  $b'$ , sur la droite  $b'a$ ; le second  $F'$ , au contact de la projection verticale  $F'd'$  de l'hélice et de la limite  $F'$  de la projection verticale du filet; le troisième  $O'$ , sur la courbe limite  $F'$ , qui a pour asymptote la droite  $ab'$ , prolongée indéfiniment.

Examinons maintenant quelle doit être, d'après les données de l'épure  $A$  (pl. 4), la limite de la projection verticale (fig. 2) des surfaces supérieure et inférieure d'un filet, vers les angles (saillant et rentrant) des génératrices qui se croisent aux points  $c$  et  $c'$ . Vers l'angle saillant  $c$  (fig. 2 et 3), on distinguera les deux courbes  $g'e$ ,  $ge'$ , touchées par la projection verticale  $dece'd'$  de l'hélice aux points  $e$  et  $e'$ . Ces deux courbes  $g'e$ ,  $ge'$ , se construisent comme la ligne  $F'\mu$  (fig. 2 et 3, pl. 2 des cahiers 1 et 5).

Vers l'angle rentrant  $c'$  (fig. 2 et 4), les deux courbes  $g''c''$ ,  $g'''c''$ , se croisent en un point  $c''$ , situé sur l'horizontale  $c'c''$ , à la droite du point  $c'$ , intersection de l'horizontale  $c'c''$ , et de la projection verticale  $d''c'd''$  de l'hélice arête des deux surfaces d'un filet.

*De la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur les filets  
de la vis triangulaire.*

On peut construire cette ligne par les méthodes décrites pages 13 et 69 de ce volume; ou par la méthode plus simple, qu'on vient d'employer pour trouver (pl. 2, cahiers 2 et 5) la limite de la projection verticale du filet de la vis, et qui consiste à regarder la surface du filet comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un paraboloïde du second degré, de forme constante.

Soient (pl. 4)  $CA, ca$ , les deux projections de la droite génératrice de la surface supérieure du filet;  $AE, aE'$ , les deux projections d'une parallèle aux rayons de lumière, menée par le point  $(A, a)$ , où la droite génératrice coupe l'axe vertical  $A, a'$ .

Le plan vertical  $AEI$  touche la surface du filet en un point situé sur l'axe  $A, a'a$ , et  $v$  est la projection verticale de ce point. La distance  $av$  du point  $a$  au point  $v$ , est à la hauteur totale du pas de la vis dans le rapport de l'arc  $CSI$  du rayon  $AC$ , à la circonférence entière du même rayon. La droite mobile  $AC, ac$ , génératrice de la surface du filet, transportée dans le plan vertical  $EAI$ , coupe l'axe  $A, a'a$  au point  $A, \nu$ . Continuant à tourner autour de cet axe, il revient dans le plan vertical  $AE$ , et coupe l'axe au point  $A, \mu$ ; la distance du point  $\mu$  au point  $v$  est égale à un demi pas de la vis.

Considérant ensuite la génératrice dans une position quelconque, par cette génératrice et par une parallèle aux rayons de lumière, on menera un plan qui touchera le paraboloïde correspondant à la position donnée de la génératrice en un point; et ce point appartiendra à la ligne de séparation d'ombre et de lumière, dans l'hypothèse où les rayons de lumière sont parallèles entr'eux. La ligne qui est le lieu de tous ces points, a pour projection horizontale une courbe à deux branches  $STAQR, MNAOP$ . Ces deux branches sont touchées par la même droite  $EAI$  au point  $A$ , et elles ont pour diamètre commun la perpendiculaire à cette droite élevée par le même point  $A$ .

Les droites qui engendrent les deux surfaces du filet, étant également inclinées par rapport à l'axe de la vis, la surface inférieure peut être considérée comme le prolongement de la surface supérieure. D'où il suit que la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface inférieure, a aussi pour projection horizontale la courbe des branches  $STAQR, MNAOP$ . Les portions utiles de ces deux branches sont  $ST, MN$ , pour la surface supérieure,  $QR$  et  $OP$  pour la surface inférieure. Elles sont comprises entre les deux cercles des rayons  $AC, AB$ .

à la portion  $ST$ , correspond en projection verticale la portion  $st$  de la courbe  $stvqr$ ; à la projection horizontale de la courbe  $STAQR$ , correspondent autant de courbes telles que  $stvqr$  en projection verticale, qu'il y a de tours de filets sur la vis.

Dans l'épure  $A$ , la courbe  $st$  a été tracée sur trois filets en  $st, s't', s''t''$ .

La courbe  $mn$ , qui correspond à  $MN$ , a été transportée en  $m''n''$ , et  $m'n'$ .

Les verticales  $Rr, Qq$ , comprennent les courbes égales  $qr, q'r', q''r''$ , qui ont pour projections horizontales la portion de courbe  $QR$ . De même les verticales  $Oo, Pp$ , comprennent les courbes égales  $op, o'p', o''p''$ , qui ont pour projections horizontales la portion de courbe  $OP$ . Ces dernières courbes, tant en projection horizontale qu'en projection verticale, appartiennent à la surface inférieure des filets.

Pour tracer exactement les portions  $ST, MN, RQ, PO$ , de la projection horizontale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, on déterminera la position de la génératrice sur laquelle se trouve le point de cette projection, située à l'infini. Pour trouver cette position, on menera par le point  $A, a$ , où la génératrice, dans sa première position  $AC, ac$ , coupe l'axe de la vis, un parallèle au rayon de lumière, cette parallèle rencontre le plan horizontal  $ca' E''$  au point  $I'$ . Menant par ce point  $I'$  une tangente au cercle décrit du point  $A$  comme centre avec le rayon  $AC$ , les droites menées du point  $A$  aux points de tangence seront les projections horizontales des génératrices de la surface du filet, sur lesquelles se trouvent les points de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, situés à l'infini.

En effet, ces tangentes menées par le point  $I'$  au cercle du rayon  $AC$ , seront les traces des plans tangens aux paraboloides qui touchent les surfaces du filet; or, ces traces étant perpendiculaires aux projections horizontales des génératrices par lesquelles passent les paraboloides tangens (1), les plans tangens sont parallèles aux droites génératrices des paraboloides dans le second système de génération; d'où il suit que les points de tangence seront situés à l'infini.

Après avoir construit les lignes de séparation d'ombre et de lumière, on tracera les contours des ombres portées par ces lignes ou par les parties qui composent une vis, sur les filets de cette vis. La légende suivante indique les lignes données de l'épure  $A$ , les lignes à construire, et les courbes qui terminent les ombres portées sur les diverses parties de la vis.

(1) C'est ainsi que dans la fig. 2, pl. 2, cahiers 1 et 5, la trace  $B'N$  est perpendiculaire à  $B'A$ .

*Légende du dessin de la vis triangulaire, Epure A (pl. 4).**Lignes données.*

*Projection horizontale* (fig. 1).      *Projection verticale* (fig. 2).

*AB*, rayon du cercle qui sert de base au noyau de la vis.       $\alpha\beta\gamma\delta$ , tête de la vis.

*AC*, rayon de la circonférence, projection de l'hélice, arête du filet.       $\epsilon\zeta\eta\theta$ , écrou.

*AD*, rayon du cercle qui sert de base à la tête de la vis.       $\lambda\lambda'$ , intersection des plans horizontal et vertical.

*ABC*, projection de la droite génératrice du filet.      *abc*, projection de la droite génératrice du filet.

*E*, projection du rayon de lumière.      *E'*, projection du rayon de lumière.

*Lignes à construire.*

- 1°. *B<sub>1</sub>π<sub>5</sub>*, intersection du filet de la vis par le plan horizontal  $\epsilon\zeta$  de l'écrou.
- 2°. *FGAHKL* (fig. 1), courbe de contact des surfaces supérieure et inférieure d'un filet de la vis, et du cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan vertical ;
- 3°. La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur les filets ;
- 4°. Ombre portée par la surface inférieure d'un filet sur la surface supérieure du filet immédiatement au-dessous ;
- 5°. Ombre portée par l'hélice arête d'un premier filet sur les surfaces supérieures des filets situés au-dessous du premier ;
- 6°. Ombres portées par les surfaces des filets, et par l'hélice intersection de ces surfaces, sur le plan horizontal  $\epsilon\zeta$  de l'écrou.

De ces six courbes, on connoît, d'après ce qui vient d'être dit, la manière de construire les trois premières ; pour trouver les trois autres, il faut se rappeler qu'on obtient l'ombre que porte

une courbe quelconque éclairée, sur une surface engendrée par une ligne droite, en menant par les droites de cette surface, une suite de plans parallèles aux rayons de lumière, qui coupent en lignes droites, le cylindre dont les arêtes sont parallèles à ces rayons, et qui a pour base la courbe éclairée. Lorsque cette courbe est à double courbure, on substitue à cette base une section plane du cylindre.

Pour construire les lignes de l'épure *A*, que nous allons indiquer par le supplément de la légende, les trois cylindres qui ont pour bases la ligne de séparation d'ombre et de lumière, l'hélice arête des filets, et le cercle qui termine la tête de la vis, ont été coupés par le plan horizontal  $\epsilon_2$  (fig. 2), de l'écrou.

En faisant varier les projections *E*, *E'*, du rayon de lumière, la forme des ombres sur la vis, variera; mais pour que la solution de ce problème, relatif au dessin de la vis, soit complète, il faut éviter de donner aux rayons de lumière une direction telle que l'hélice arête des filets, mette dans l'ombre la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur les surfaces des filets.

### Suite de la Légende.

#### CONTOURS DES OMBRES PORTÉES.

	Projection horizontale.	Projection verticale.
1. Ombre portée par le cercle $\beta\delta$ de la tête de la vis sur le filet au-dessous de ce cercle.....	<i>UVX.</i>	<i>uv'x.</i>
2. Ombre portée par la courbe $PO, p'o'$ , sur le filet au-dessous.....	<i>OY.</i>	<i>o'y.</i>
3. Ombre portée par la courbe $RQ, r'q'$ , sur le filet au-dessous.....	<i>QZ.</i>	<i>q'z.</i>
( Cette courbe s'arrête au point $Z, z$ de la courbe $TZS, c''zs''$ , séparation d'ombre et de lumière.)		
4. Ombre portée par la courbe $P\tau, p''\tau'$ , sur le plan horizontal $\epsilon_2$ .....	$\tau\phi.$	$\epsilon_2.$
5. Ombre portée par l'hélice $PM, p''m''$ , sur le même plan.....	$\phi\psi.$	<i>Id.</i>
6. Ombre portée par la courbe $MY, m''y$ , sur le même plan.....	$\psi\sigma.$	$\epsilon_2.$

	Projection horizontale.	Projection verticale.
7°. Ombre portée par la courbe $PO, p'o'$ , sur le même plan.....	51.	Id.
8°. Ombre portée par l'hélice $PM, p'm'$ , sur le même plan.....	12.	Id.
9°. Ombre portée par la courbe $MU, m'u$ , sur le même plan.....	23.	Id.
10°. Ombre portée par le cercle inférieur de la tête de la vis.....	34.	Id.
11°. Ombre portée par la courbe $Ql, q''l''$ , sur la surface supérieure du filet au-dessous de cette courbe.....	Q5.	q''5'.
12°. Ombre portée par la courbe $lR, l''r''$ , sur le plan horizontal $\epsilon_2$ .....	5i.	?
(i est un point très-près de 5; la courbe 5i est prolongée en i'.)		
13°. Ombre portée par l'hélice $RS, r's'$ , sur le plan horizontal $\epsilon_2$ .....	i56.	Id.
14°. Ombre portée par la courbe $ZS, zs''$ , sur le même plan.....	67.	Id.
15°. Ombre portée par la courbe $kR, k'r'$ , sur le même plan.....	78.	Id.
16°. Ombre portée par l'hélice $RX, r'x$ , sur le même plan.....	89.	Id.
17°. Séparation d'ombre et de lumière sur la tête de la vis.....	10 et 11.	(10) et (11).

*Remarque sur la courbe  $\pi_5 B_1 \pi$  (fig. 1), intersection des filets de la vis par le plan horizontal supérieur de l'écrou  $\epsilon_2$  (fig. 2).*

Cette intersection est composée de deux branches qui se croisent aux points  $\pi$  et  $B$ ; l'une  $\pi_5 B$  appartient à la surface supérieure du filet, et l'autre  $B_5 \pi$  à la surface inférieure. En rapportant les points de cette courbe au point  $A$ , comme pôle, on trouvera facilement la loi du décroissement des rayons vecteurs qui partent de ce point. C'est par cette méthode que M. Girard a construit les points de la ligne  $\pi_5 B_1 \pi$  (fig. 1).

§. II.

SCIENCES PHYSIQUES.

*Extrait de plusieurs Mémoires sur le Diamant ;*

Par M. GUYTON-DE-MORVEAU.

Le premier de ces mémoires , lu à l'Institut le 14 juin 1799 , pour titre :

*Extrait du procès-verbal des expériences faites à l'Ecole polytechnique , dans les années 1797 et 1798 , sur la combustion du diamant.* Il résulloit de ces expériences ,

1°. Que le produit de la combustion du diamant , ou de sa combinaison avec l'oxigène jusqu'à saturation , est de l'acide carbonique sans résidu ; que ce diamant est le carbone pur , la base acidifiable de l'acide carbonique ;

2°. Que le diamant brûle à une température à-peu-près égale à celle qui fond l'argent ;

3°. Qu'un diamant isolé ne brûle pas assez rapidement , dans le gaz oxigène , pour entretenir la température que sa combinaison avec ce gaz exige ;

4°. Que cette combustion se fait en deux temps ; le diamant s'incinère à sa surface , avant de se convertir en acide carbonique. M. Guyton a bien voulu ne pas laisser ignorer qu'il avoit eu pour coopérateurs de ces expériences , MM. Hachette et Desorme. Le premier mémoire est terminé par des rapprochemens très-ingénieux , qui résultent de la comparaison de la plombagine , de l'anthracite , du charbon et du diamant.

Le second mémoire de M. Guyton , lu à l'Institut le 13 août 1799 , pour titre : *Procès-verbal de la conversion du fer doux en acier fondu par le diamant.*

Pour confirmer l'identité du diamant et du carbone pur , M. Hachette avoit proposé à ses amis , MM. Clouët et Welter , de convertir le fer en acier par le diamant ; il fit la demande à M. Guyton de l'un des diamans de l'Ecole pour cet usage ; ce

célèbre chimiste n'a pas hésité de l'accorder, persuadé que, s'il disparoissoit dans cette opération, par la seule exposition à une haute température, en contact avec le fer, sans accession de l'air ni d'aucun autre oxigénant, le fait acquis ne laisseroit aucun regret de l'avoir sacrifié.

M. Clouet avoit préparé lui-même un petit creuset de fer doux, forgé exprès avec des clous d'épingles choisis. Sa forme étoit un solide à huit pans; il fermoit par un bouchon du même fer, bien ajusté. Ce creuset devoit être placé dans un creuset de Hesse, garni de son couvercle bien luté. Voilà tout l'appareil de l'expérience dont M. Guyton a fait connoître le résultat par la lecture du procès-verbal suivant :

*Procès-verbal de l'expérience faite à l'Ecole Polytechnique, le 12 août 1799, sur la conversion du fer en acier par le diamant.*

Le diamant employé pesoit 907 milligrammes. Comme il n'occupoit pas toute la capacité du creuset, on acheva de le remplir avec de la limaille du même fer que celui dont il étoit formé. Le creuset fut fermé avec son bouchon de fer, que l'on fit entrer avec force, pour qu'il restât le moins d'air possible dans l'intérieur.

Le creuset et le bouchon pesoient ensemble	55.8 grammes.
La limaille qui recouroit le diamant pesoit	2
Poids total du fer environnant le diamant	<u>57.8</u>

Après avoir fait partir l'excédant du bouchon, le creuset fut placé seul et sans addition d'aucune matière environnante, dans un très-petit creuset de Hesse, et celui-ci dans un second creuset de même terre; mais l'intervalle entre les deux creusets fut rempli de sable siliceux, exempt de toutes parties ferrugineuses. Enfin le plus grand creuset fut luté avec de la terre provenant de creusets pilés et d'argile crue, et le tout fut exposé environ une heure au feu de la forge à trois vents.

Tout étant refroidi, on a trouvé dans le creuset de Hesse intérieur, le creuset de fer converti en un culot d'acier fondu. Il ne formoit avec le bouchon et la limaille qu'une seule masse arrondie et bien terminée, à quelques petits globules près, qui en étoient détachés, et dont le poids n'étoit que de 884 milligrammes.

Le culot d'acier fondu pesoit.....	55.500 grammes.
Les globules détachés.....	0.884
Poids total de l'acier obtenu.....	56.384

Le fer et le diamant pesoient, avant l'opération, 58.707 gram., d'où il suit qu'il y a une perte de fer d'environ 2.323 grammes. Ce fer avoit donné au creuset de Hesse la couleur de la plombagine.

*Signé CLOUET, WELTER et HACHETTE.*

Le 7 septembre 1799, M. Guyton a communiqué à l'Institut le résultat d'une nouvelle expérience du diamant. On avoit fixé sur le fond d'une petite capsule de platine, un diamant brut, cristallisé et bien transparent; on l'avoit couvert d'un mélange de 5 grammes d'alumine précipitée de l'alun par l'ammoniaque, et 15 décigrammes de chaux. Malgré les édulcorations répétées du précipité d'alumine, il retenoit encore de l'acide sulfurique. Après avoir mis la capsule de platine dans un creuset d'argile, on tint le mélange terreux et le diamant au feu d'une forge à trois vents, environ une demi-heure. M. Clouet, qui avoit proposé cette expérience, croyoit que le mélange terreux se changeroit en un verre qui se combinerait avec le diamant. Au lieu d'une masse vitreuse, on a obtenu un sulfure terreux gris, opaque, qui exhaloit sensiblement l'odeur de soufre, et qui, soumis à différens essais, en a manifesté toutes les propriétés. Le diamant étoit devenu noir, et tranchoit ainsi avec le gris du sulfure. Avant l'opération il pesoit 158 milligrammes; il a perdu 58 milligrammes, plus du tiers de son poids. Il a été remis dans cet état, par M. Guyton, au cabinet de l'Ecole Polytechnique.

Ces trois mémoires sont insérés dans les volumes 31 et 32 des *Annales de Chimie*, année 1799.

Le 31 juillet 1809, M. Guyton a lu à l'Institut un mémoire sur la décomposition de l'eau par le diamant incandescent. Ce mémoire est inséré dans la *Correspondance*, tom. 2, pag. 109. Un cinquième mémoire de M. Guyton, qu'on doit considérer comme la suite des quatre premiers, vient d'être inséré dans le volume 84 des *Annales de Chimie*, année 1812, il a pour titre: *Nouvelles expériences sur la combustion du diamant et autres substances charbonneuses, en vaisseaux clos.*

Des sept expériences dont M. Guyton rend compte dans ce dernier mémoire, les quatre premières ont pour objet la combustion du charbon de chêne, la plombagine de Keswick dans le Cumberland, la plombagine du Piémont, et l'anthracite. La

combustion du diamant est l'objet des trois dernières. Dans ces trois expériences on a brûlé 2,1650 grammes de diamant, dont 0,8665 grammes ont été donnés par M. d'Arcet. Nous allons extraire, de ce dernier mémoire, la description de l'appareil, tel que MM. Guyton et Clément l'ont disposé, et les conclusions que M. Guyton a cru devoir tirer, tant de ses expériences que de celles qui ont été faites en Angleterre, sur le même sujet, par MM. Allen et Pepys.

*Extrait du cinquième mémoire sur le Diamant ;*

Par M. GUYTON.

Les conséquences que l'examen comparatif du pouvoir réfringent de diverses substances, avoit présentées à M. Biot sur la composition du diamant, ayant fait désirer de nouvelles expériences pour déterminer sa vraie nature, nous en avons été chargés, M. Hachette et moi, par l'administration (1) de l'Ecole impériale Polytechnique, qui a mis à notre disposition 15 diamans pesant ensemble 1536 milligrammes (28.9185 grains, ou 7 karats  $\frac{11}{12}$  des joailliers), réservant seulement pour son cabinet ceux qui pouvoient servir à l'instruction, soit par la régularité de leur cristallisation, soit comme conservant des traces intéressantes des commencemens de combustion que je leur avois fait subir dans mes premières expériences. M. Clément a bien voulu partager avec nous ce travail, et l'intérêt qu'y a pris M. d'Arcet, nous a procuré l'avantage de l'avoir souvent pour coopérateur.

Dans l'extrait que je publiai dans le tome 65 des *Annales de Chimie*, du mémoire de MM. Allen et Pepys, sur la nature du diamant, j'ai déjà fait connoître l'appareil qui avoit servi à nos premières expériences, et qui étoit composé d'un tube (fig. a, pl. 5) de platine dans lequel une pompe à cric servoit à faire passer le gaz oxigène, lorsqu'il avoit été chauffé au rouge-blanc. Ce tube que nous avions fait tirer à la manière des tubes des lunettes, pour éviter les soudures, étoit nécessairement très-mince, et fut bientôt hors de service par l'affaissement qu'il subit dans une des opérations préliminaires et qui détermina une fissure.

Obligés de faire construire un nouvel appareil, nous avons pensé que pour le mettre à l'abri de semblables accidens, il falloit donner beaucoup plus d'épaisseur au tube destiné à traverser le fourneau, et en augmenter en même-temps le calibre intérieur, afin de pouvoir y introduire des substances d'un plus

(1) Elle a aussi fourni les fonds nécessaires pour l'acquisition des appareils.

grand volume, ou même y placer un support approprié, dans les cas où il y auroit à craindre que les corps soumis à l'expérience ne fussent emportés par le courant, ou que le résidu de la combustion ne contractât quelque adhérence aux parois du tube (1). Il n'y avoit d'autre moyen pour atteindre ce but, que de faire forger un cylindre massif de platine, pour le forer ensuite à la manière des canons : c'est le parti que nous avons pris, et qui nous a mis en possession d'un instrument que nous croyons le plus solide et le plus commode que l'on puisse employer pour ce genre de recherches.

Je crois devoir donner ici la description de l'appareil entier (2), de la manière de s'en servir, et des perfectionnemens que nous y avons successivement ajoutés, avant de présenter les résultats des expériences pour lesquelles il a été construit.

*AB* (fig. 1, pl. 5), est un tube de platine de 34 centimètres de longueur. La partie *cd*, est celle dont j'ai parlé plus haut, de 15 centimètres de longueur, de 24 millimètres de grosseur, qui a été forgée pleine, et ensuite forée pour lui donner un calibre intérieur de 15 millimètres; de sorte qu'on lui a conservé quatre millimètres d'épaisseur.

A chaque bout de cette pièce est ajusté et soudé à l'or pur, un autre tube de platine laminé à 2 millimètres seulement d'épaisseur, également soudé à l'or, et terminé par un collet renforcé, ouvert intérieurement en cône, et portant cinq filets de vis, pour recevoir les ajutages, comme on les voit représentés (fig. 2), sur une plus grande échelle.

Ce tube est placé dans les échancrures pratiquées dans le fourneau *E, F* (fig. 1), formé de deux creusets appelés *de plomb noir*, dont on a enlevé les fonds, de 11 centimètres de diamètre dans leur évasement (3). On voit en *g* la grille; *h* est le trou pratiqué pour recevoir la tuyère d'un soufflet à double vent, d'environ 29 décimètres cubes de capacité.

Les ajutages *a, b*, du tube de platine, communiquent, à 38 centimètres de distance, à l'une des branches des vases à-peu-près

(1) C'est ce qui nous étoit arrivé en traitant dans le premier appareil de la plombagine qui nous avoit été donnée comme venant de Keswill.

(2) MM. les Elèves peuvent voir cet appareil dans le cabinet de physique de l'Ecole Polytechnique.

(3) On sait que ces creusets de *plomb noir*, qui nous viennent d'Allemagne, se taillent très-facilement; qu'ils ont la propriété de supporter le passage du chaud au froid sans se fendre; qu'ils sont très-réfractaires, et tiennent mieux que les autres la chaleur dans leur intérieur, à raison de la plombagine qui entre dans leur composition.

demi-circulaires *I* et *K*, contenant du muriate de chaux, que nous nommons par cette raison *tubes desséchans*, et qui sont environnés de glace dans les terrines *L* et *M*. L'autre branche de ces tubes reçoit un ajutage du même genre, qui la met en communication avec l'intérieur du gazomètre placé de son côté, lorsque le robinet est ouvert.

- Lorsque nous eûmes connoissance de l'appareil de MM. Allen et Pepys, décrit dans les *Transactions philosophiques* de 1807 (part. 2), nous prîmes la résolution de construire nos gazomètres à leur exemple, pour en rendre la manipulation plus facile, en réduisant le mercure à un beaucoup plus petit volume. Mais pour en étendre l'usage, et pouvoir y traiter même les gaz acides, au lieu de les faire couler en fonte, nous arrêtâmes de les faire exécuter en porcelaine.

Cependant nous ne tardâmes pas à reconnoître que l'opacité de la matière seroit un grand obstacle à la détermination précise du niveau du mercure, tant dans l'intérieur de la cloche qu'à l'extérieur; que le volume des gaz ne pourroit être ainsi mesuré qu'en rétablissant l'équilibre des deux colonnes par la communication avec la pression du dehors; ce qui ne pouvoit manquer de multiplier les chances d'erreurs, par la quantité d'ajutages et de robinets destinés à opérer cette communication. Nous revînmes donc aux gazomètres de verre. Je vais donner la description de ceux que nous avons définitivement adoptés, après plusieurs essais qui nous ont donné la mesure des précautions à prendre pour en assurer la solidité.

*OP* (fig. 1 et 2) est un cylindre ou *manchon* de verre blanc, de 26.5 centimètres de hauteur, de 7 millimètres d'épaisseur et de 16 centimètres de diamètre intérieur. Les bords inférieurs sont dressés pour s'appliquer exactement sur une glace doucie, mastiquée bien horizontalement sur le pied de bois *Q*. Ce manchon est fixé sur la glace par le cercle de fer *R*, réuni au pied de bois par les branches de fer *s*, qui traversent le cercle et le tirent par leurs écrous.

*T* est une cloche de verre sans bouton, de 12.2 centimètres de diamètre extérieur, de 19.5 de hauteur, dont les bords inférieurs s'appliquent également sur la glace du fond, et qui y est fixée par la verge de fer *U*, percée dans toute sa longueur et taraudée en vis à l'extrémité supérieure, pour entrer dans la petite calotte de fer *V*, faisant fonction d'écrou.

Cette verge de fer est percée pour recevoir un tube de verre *v*, qui s'élève de 2 centimètres au-dessus de la calotte de fer *V*, et qui, arrivé au pied de bois, en traversant la glace, se courbe et se prolonge jusqu'au robinet d'acier *X*, auquel il est mastiqué.

Enfin *Y* est le récipient mobile, ou cloche de verre de 13 cen-

timètres de diamètre intérieur, de 4 millimètres d'épaisseur, de 21.5 centimètres de hauteur. Cette cloche, dont la capacité est de près de 2 décimètres cubes, porte une échelle gravée au diamant en décilitres.

Il n'y a, comme l'on voit, aucune différence de l'un des gazomètres à l'autre, étant tous les deux destinés à faire passer et repasser les gaz par le tube de platine. On a cru seulement devoir représenter dans l'un des deux, le récipient *Y* élevé, pour indiquer l'usage des branches de fer *z*, qui lui servent de conduite.

Une attention importante dans la construction de ses instrumens, est que les pièces de verre aient été parfaitement recuites, celles sur-tout qui en forment la partie extérieure, que nous avons vues plusieurs fois se fendre lorsqu'elles étoient vides et en repos. Ces ruptures spontanées, sans changement sensible de température, ne pouvant être occasionnées que par des vibrations, on prévient ces accidens en couvrant cette partie d'un yélin qui laisse assez de transparence pour juger les lignes de niveau du mercure, que l'on peut même enlever vis-à-vis l'échelle, sans qu'il cesse de produire son effet.

La figure 3 représente, de grandeur naturelle, le tube par lequel on fait passer les gaz que l'on veut introduire dans un gazomètre, pour qu'ils y laissent toute l'eau que le muriate de chaux peut leur enlever. *A, B* est un tube de verre pouvant contenir de 20 à 22 grammes de ce sel poussé à fusion sèche et cassé en morceaux de la grosseur d'un pois. Ce tube, pris des deux bouts dans des viroles mastiquées, s'adapte à l'un des robinets *X*, par l'extrémité *C*, garnie comme toutes les jointures de l'appareil, d'un cône alaisé, qui, pressé par la boîte coulante à écrou *E*, empêche toute communication avec l'air du dehors. L'autre extrémité *D* est terminée en vis pour recevoir le robinet d'un récipient, d'une vessie, ou d'une pompe à double ajoutage.

C'est par le moyen d'un tube semblable, que M. Van-Marum desséchoit le gaz oxygène dans ses expériences sur la combustion du phosphore en vaisseaux fermés (1). L'un des objets les plus importans de celles que nous nous proposons, étant de saisir et de déterminer les moindres quantités d'eau qui pouvoient être portées par le gaz, ou qui auroient pu se former dans l'opération, nous n'avons pas cru devoir nous borner à ce premier dessèchement lors de l'introduction du gaz, et nous y avons ajouté les deux autres tubes desséchans dont j'ai parlé, qui, étant destinés par leur position à tamiser en quelque sorte les gaz, toutes les fois que nous les ferions passer et repasser dans le cylindre de

(1) *Description de quelques appareils, etc.*, p. 36.

platine incandescent , ne permettroient pas qu'aucune partie d'eau pût échapper à l'action du sel , sur-tout avec la précaution d'y entretenir la température de la glace fondante.

M. Van-Marum employoit , à l'exemple de Saussure , la potasse fondue au creuset ; nous avons donné la préférence au muriate de chaux , non que nous lui attribuions la propriété d'attirer plus puissamment l'humidité , mais parce que la potasse passant beaucoup plus promptement à un état pâteux , qui dispose les angles des fragmens à se réunir , ne pouvoit servir que dans des conduits placés horizontalement ; en observant encore de pratiquer l'entrée et la sortie du gaz dans la partie supérieure ; et que l'agglutination de ces mêmes fragmens au fond de nos tubes circulaires , auxquels nous accordions le plus de confiance , auroit suffi pour intercepter la communication. Il n'est pas besoin de dire que nous n'avions pas le choix dans ces derniers , où la potasse auroit pris le gaz acide carbonique qu'il s'agissoit principalement de recueillir et de mesurer.

Quoique la propriété du muriate de chaux poussé à fusion sèche , d'attirer l'humidité de l'air , soit bien connue , nous n'avons pas négligé de nous assurer , par des essais , de la puissance de celui que nous avions préparé.

Sous une cloche de verre contenant cinq décimètres cubes d'air , placée sur le mercure , on a introduit l'hygromètre pour les gaz , dont j'ai donné la description (1) , chargé de 13.325 grammes de muriate de chaux en morceaux. Le godet qui le contenoit , retiré et pesé le 6<sup>e</sup>. jour , avoit reçu une augmentation de poids de 92 milligrammes , ou de 18.4 par décimètre cube d'air.

Le godet remplacé sur-le-champ sous la cloche , on y fit passer à travers le mercure , une petite fiole contenant 120 milligrammes d'eau distillée. Deux jours après , il ne restoit plus d'eau dans la fiole , et le muriate de chaux avoit acquis une nouvelle augmentation de poids de 195 milligrammes , c'est-à-dire 75 de plus que le poids de l'eau.

On a reporté successivement sous la même cloche 25 décigrammes d'eau , observant à chaque fois de prendre l'augmentation de poids du muriate de chaux et les quantités d'eau retrouvées dans la fiole , lorsqu'on n'avoit pas donné le temps pour l'évaporation totale ; le résultat de l'expérience a été une absorption de 2.620 grammes de l'eau introduite , et une augmentation de poids du muriate de 2.871 grammes , y compris les 92 milligrammes fournis le premier jour par l'air de la cloche ; les 159 milligrammes en sus étoient nécessairement le produit de l'humidité transmise par le mercure de la cuve , pendant la durée de l'ex-

(1) *Annales de Chimie*, octobre 1808.

périence, quoique la cloche y fût enfoncée à plus d'un centimètre au-dessous du niveau. Le muriate de chaux seulement blanchi et un peu gonflé à sa surface, laissoit encore des interstices suffisans pour la circulation de l'air.

On verra que chacun de nos tubes demi-circulaires pouvoit tenir de 11 à 12 grammes du même sel ; de sorte qu'en suivant les mêmes proportions, ils devoient absorber 4.74 grammes d'eau avant que la surface des fragmens devînt assez liquide pour en opérer la réunion, ce qui donne une puissance attractive bien supérieure à celle dont nous avons besoin ; mais cet excès nous garantissoit la rapidité de l'absorption, qui, comme tous les effets de l'affinité, dépend du contact des élémens qu'il s'agit de combiner.

Après cela , il ne nous étoit plus possible de douter que l'augmentation de poids de ces tubes desséchans ne représentât exactement toute la quantité d'eau qui auroit été introduite dans l'appareil, ou qui s'y seroit formée pendant l'opération. C'est pour que l'on puisse avec connoissance en porter le même jugement, que j'ai cru devoir rendre un compte aussi détaillé des moyens que nous avons pris pour atteindre ce but.

Le gaz oxigène que nous avons employé a toujours été tiré immédiatement avant l'expérience, du muriate sur-oxigéné de potasse.

On a fait bouillir le mercure avant que d'en remplir les gazomètres.

Enfin les volumes des fluides aériformes n'ont été déterminés que d'après les corrections qu'exigeoient la température et la pression.

*Ces précautions indiquées une fois pour toutes, M. Guyton passe aux expériences faites avec l'appareil qu'il a décrit ; et après avoir exposé les faits tels qu'on les a observés, il en tire la conclusion suivante :*

#### C O N C L U S I O N .

Il n'est plus possible d'admettre dans la composition du diamant un tiers ou même un quart de son poids d'hydrogène. Les expériences dont nous venons d'exposer les procédés et les résultats, nous paroissent fournir à ce sujet des preuves plus directes que celles que MM. Davy, Allen et Pepys opposoient déjà à cette théorie, et qui faisoient dire à M. Haüy, « que leurs résultats s'accordoient à infirmer l'opinion que l'hydrogène fût la cause de la grande puissance réfractive du diamant ; opinion dont la vraisemblance étoit fondée sur les applications aussi exactes qu'ingénieuses que MM. Biot et Arago avoient faites

» des lois de la lumière à l'analyse de plusieurs corps naturels (1). »

Il n'y a même jusqu'à présent aucune probabilité de l'existence d'une proportion quelconque de ce principe, dans le diamant (si ce n'est peut-être cette infiniment petite quantité d'eau de cristallisation dont j'ai parlé). L'hydrogène n'est pas plus partie constituante essentielle de la plombagine et du charbon.

Il ne l'est point de la plombagine : des essais de la plombagine de Cornouailles, répétés avec la plus rigoureuse précision par M. Th. de Saussure, l'ont conduit à ce résultat ; *elle ne fournit, en brûlant, ni eau ni gaz hydrogène* (2).

Il ne l'est pas dans le charbon, puisque, suivant les expériences de MM. Gay-Lussac et Thénard, une fois que le gaz muriatique oxygéné lui a enlevé la dernière portion qu'il retient, même après une forte calcination, il reste sans action à la plus haute température pour en opérer la décomposition (3).

Si l'on ne trouve pas dans nos expériences la confirmation des différentes quantités d'oxygène que prennent en brûlant le diamant et le charbon, telles que je les avois déterminées d'après la grande expérience faite en 1798, au foyer de la lentille de Tschirnawsen (4), il s'en faut beaucoup qu'elles autorisent à conclure l'identité absolue de ces deux substances, ou même qu'elles laissent entrevoir la possibilité de donner une solution plus satisfaisante de ce problème, justement regardé par M. Haüy, comme « l'un des plus propres à piquer la curiosité, ayant pour but de » démontrer jusqu'où s'étend l'analogie de nature entre deux » corps, que le contraste de leurs propriétés physiques tendroit » plutôt à faire regarder comme les extrêmes d'une série (5). »

C'est sans doute l'évidence de ce contraste qui a porté M. Davy à admettre dans le diamant une composition chimique différente, à raison de la présence d'une infiniment petite quantité d'oxygène; mais cette opinion, qu'il n'a pu fonder que sur sa propriété idio-électrique, est inconciliable, non-seulement avec ses caractères les plus marqués, mais sur-tout avec ce principe si généralement reconnu, que l'aggrégation rompue par un commencement d'union rend la saturation plus facile et plus prompte; de sorte que la résistance du diamant à l'oxygénation devroit être moindre que celle du charbon.

Ce savant physicien est plus près de la vérité, lorsqu'il recon-

(1) *Tableau comparatif des résultats de la cristallisation et de l'analyse chimique*. Note 102, pag. 235.

(2) *Annales de Chimie*, tom. LXXI, pag. 290.

(3) *Recherches physico-chimiques, etc.*, tom. II, nos. 330 et 333.

(4) *Annales de Chimie*, tom. XXXI, pag. 72.

(5) *Tableau comparatif, etc.*, note 102.

noît qu'une petite différence dans la composition chimique des corps en produit une très-grande dans leurs qualités extérieures et physiques (1). Il semble en préparer lui-même l'application à la résolution de la question, lorsqu'il adopte la conclusion de MM. Allen et Pepys, que la plombagine, le charbon et le diamant consomment en se brûlant, à peu de chose près, la même quantité d'oxygène.

Il est donc vrai que l'on n'est pas encore parvenu à déterminer rigoureusement les quantités d'oxygène que ces corps exigent pour leur combustion, et que l'on peut encore demander si dans celle du charbon, on ne feroit réellement que compléter ce qui lui manque pour le porter à l'état d'acide.

Rien ne peut mieux éclaircir la question, que le rapprochement des nombreuses observations qui établissent à-la-fois, et des caractères si tranchans entre le diamant et le charbon, même réduit à ses élémens essentiels, et les indices si puissans d'un commencement d'oxydation du carbone dans le dernier. On n'hésitera pas sans doute d'admettre dans cette série les disproportions aussi énormes de densité, de dureté, de transparence, d'inflammabilité, le lustre que prend le charbon privé d'eau et d'hydrogène; la résistance à l'inflammation qui s'accroît en proportion de ce changement; l'état dans lequel se montre constamment le diamant par la première impression de l'oxygène, déterminée par l'élévation de température, état dans lequel il manifeste si sensiblement la forme, la couleur, la foible aggrégation, le peu de densité du charbon (2).

Ces faits sont désormais à l'abri de toute contradiction, et ils ne peuvent ni se concilier ni recevoir d'explication plausible, qu'en admettant dans le charbon une partie quelconque d'oxygène, qui le constitue *protoxide du diamant*.

(1) Voyez *Bibliothèque britannique*, tom. XLII, pag. 123; et *Annales de Chimie*, tom. LXXIII, pag. 16.

En partant de ce principe, on pourroit être tenté de croire que le peu de matière étrangère que le charbon laisse en brûlant, suffit pour constituer le pur carbone dans un état de composition, dont le charbon reçoit ses caractères distinctifs; mais le charbon qui se montre au premier instant de la combustion du diamant, celui que donnent les matières animales, celui qu'on retire de l'acier, de la fonte, des carbures, etc., etc., démontrent son existence indépendamment de son union avec les matières qu'on en sépare par l'incinération.

(2) On peut appuyer les conséquences de ces rapprochemens par les résultats des curieuses expériences de M. Davy, qui l'ont mis à portée d'observer que le charbon soumis à l'appareil voltaïque devient dur, et prend le lustre de la plombagine...; que le diamant traité avec le *potassium*, noircit; qu'il s'en détache des écailles qui, vues au microscope, paroissent grises extérieurement et présentent intérieurement la couleur de la plombagine, etc.

*Analyse (1) d'un Mémoire sur la Distribution de l'Electricité  
à la surface des Corps conducteurs ;*

Par M. POISSON.

La théorie de l'électricité la plus généralement admise est celle qui attribue tous les phénomènes à deux fluides différens, répandus dans tous les corps de la nature. On suppose que les molécules d'un même fluide se repoussent mutuellement, et qu'elles attirent les molécules de l'autre : ces forces d'attraction et de répulsion suivent la raison inverse du quarré des distances ; à la même distance, le pouvoir attractif est égal au pouvoir repulsif, d'où il résulte que, quand toutes les parties d'un corps renferment une égale quantité de l'un et de l'autre fluide, ceux-ci n'exercent aucune action sur les fluides contenus dans les corps environnans, et il ne se manifeste par conséquent aucun signe d'électricité. Cette distribution égale et uniforme des deux fluides est ce qu'on appelle leur *état naturel* ; dès que cet état est troublé par une cause quelconque, le corps dans lequel cela arrive est *électrisé*, et les différens phénomènes de l'électricité commencent à se produire.

Tous les corps de la nature ne se comportent pas de la même manière par rapport au fluide électrique : les uns, comme les métaux, ne paroissent exercer sur lui aucune espèce d'action ; ils lui permettent de se mouvoir librement dans leur intérieur et de les traverser dans tous les sens : pour cette raison on les nomme *corps conducteurs*. D'autres, au contraire, l'air très-sec, par exemple, s'opposent au passage du fluide électrique dans leur intérieur, de sorte qu'ils servent à empêcher le fluide accumulé dans les corps conducteurs de se dissiper dans l'espace. Les phénomènes que présentent les corps conducteurs électrisés, soit quand on les considère isolement, soit lorsqu'on en rapproche plusieurs les uns des autres, pour les soumettre à leur influence mutuelle, sont l'objet de ce Mémoire, dans lequel

(1) Cet article précède le mémoire que M. Poisson a lu les 9 mai et 12 août 1812, à la Classe de l'Institut, dont il est membre. Il a déjà paru dans plusieurs ouvrages périodiques ; néanmoins, j'ai cru devoir l'insérer dans cette feuille, spécialement destinée à une école, où l'on enseigne l'application de l'analyse aux questions de physique, dont la solution dépend des lois générales de la mécanique.

H. C.

je me suis proposé d'appliquer le calcul à cette partie importante de la physique. Avant d'entrer en matière, je vais exposer avec quelques détails les principes qui servent de base à mon analyse, et faire connoître les résultats les plus remarquables auxquels elle m'a conduit.

Considérons un corps métallique, de forme quelconque, entièrement plongé dans l'air sec, et supposons que l'on y introduise une quantité donnée de l'un des deux fluides. En vertu de la force répulsive de ses parties, et à cause que le métal n'oppose aucun obstacle à son mouvement, on conçoit que le fluide ajouté va être transporté à la surface du corps, où il sera retenu par l'air environnant. Coulomb a prouvé en effet, par des expériences directes, qu'il ne reste aucun atôme d'électricité dans l'intérieur d'un corps conducteur électrisé, si ce n'est toutefois l'électricité naturelle de ce corps : tout le fluide ajouté se distribue à sa surface ; il y forme une couche extrêmement mince, qui ne pénètre pas sensiblement au-dessous de cette surface, et dont l'épaisseur en chaque point dépend de la forme du corps. Cette couche est terminée extérieurement par la surface même du corps, et à l'intérieur par une autre surface très-peu différente de la première ; elle doit prendre la figure propre à l'équilibre des forces répulsives de toutes les molécules qui la composent, ce qui exigeroit d'abord que la surface libre du fluide, c'est-à-dire, sa surface intérieure, fût perpendiculaire en tous ses points à la résultante de ces forces ; mais la condition d'équilibre de la couche fluide est comprise dans une autre, à laquelle il est nécessaire et il suffit d'avoir égard.

En effet, pour qu'un corps conducteur électrisé demeure dans un état électrique permanent, il ne suffit pas que la couche fluide qui le recouvre se tienne en équilibre à sa surface ; il faut, en outre, qu'elle n'exerce ni attraction, ni répulsion, sur un point quelconque pris au hasard dans l'intérieur du corps ; car si cette condition n'étoit pas remplie, l'action de la couche électrique sur les points intérieurs décomposeroit une nouvelle quantité de l'électricité naturelle du corps, et son état électrique seroit changé. La résultante des actions de toutes les molécules qui composent la couche fluide, sur un point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur du corps, doit donc être égale à zéro ; par conséquent elle est aussi nulle pour tous les points situés à la surface intérieure de cette couche ; la condition relative à sa direction devient donc superflue ; ou, autrement dit, l'équilibre de la couche fluide est une suite nécessaire de ce qu'elle n'exerce aucune action dans l'intérieur du corps.

Il résulte de ce principe , que , si l'on demande la loi suivant laquelle l'électricité se distribue à la surface d'un sphéroïde de forme donnée , la question se réduira à trouver quelle doit être l'épaisseur de la couche fluide en chaque point de cette surface , pour que l'action de la couche entière soit nulle dans l'intérieur du corps électrisé. Ainsi , par exemple , on sait qu'un sphéroïde creux , terminé par deux surfaces elliptiques , semblables entre elles , n'exerce aucune action sur tous les points compris entre son centre et sa surface intérieure , en y comprenant les points mêmes de cette surface ; on en conclut donc que , si le corps électrisé est un ellipsoïde quelconque , la surface intérieure de la couche électrique sera celle d'un autre ellipsoïde concentrique et semblable à l'ellipsoïde donné , ce qui détermine son épaisseur en tel point qu'on voudra : cette épaisseur sera la plus grande au sommet du plus grand des trois axes , et la plus petite au sommet du plus petit ; les épaisseurs de la couche , ou les quantités d'électricité , qui répondent à deux sommets différens , seront entre elles comme les longueurs des axes qui aboutissent à ces sommets.

M. Laplace a donné , dans le III<sup>e</sup>. livre de la Mécanique céleste (1) , la condition qui doit être remplie pour que l'attraction d'une couche terminée par deux surfaces à-peu-près sphériques , soit égale à zéro , relativement à tous les points intérieurs ; en supposant donc que l'épaisseur de cette couche devienne très-petite , on en conclura immédiatement la distribution de l'électricité à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère ; mais ce cas et celui de l'ellipsoïde sont les seuls où l'on puisse assigner , dans l'état actuel de la science , l'épaisseur variable de la couche fluide qui recouvre un corps conducteur électrisé.

Lorsque la figure de la couche électrique est déterminée , les formules de l'attraction des sphéroïdes font connoître son action sur un point pris en dehors ou à la surface du corps électrisé. En faisant usage de ces formules , j'ai trouvé qu'à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère , la force répulsive du fluide électrique est proportionnelle à son épaisseur en chaque point ; il en est de même à la surface d'un ellipsoïde de révolution , quel que soit le rapport de ses deux axes ; de sorte que sur ces deux espèces de corps , la répulsion électrique est la plus grande dans les points où l'électricité est accumulée en plus grande quantité. Il est naturel de penser que

---

(1) Tome II , page 37.

ce résultat est général, et qu'il a également lieu à la surface d'un corps conducteur de forme quelconque ; mais quoique cette proposition paroisse très-simple , il seroit cependant très-difficile de la démontrer au moyen des formules de l'attraction des sphéroïdes ; et c'est un de ces cas où l'on doit suppléer à l'imperfection de l'analyse par quelque considération directe. On trouvera , dans la suite de ce Mémoire , une démonstration purement synthétique , que M. Laplace a bien voulu me communiquer , et qui prouve qu'à la surface de tous les corps électrisés , la force répulsive du fluide est partout proportionnelle à son épaisseur.

La pression que le fluide exerce contre l'air qui le contient , est en raison composée de la force répulsive et de l'épaisseur de la couche ; et puisque l'un de ces élémens est proportionnel à l'autre , il s'ensuit que la pression varie à la surface d'un corps électrisé , et qu'elle est proportionnelle au carré de l'épaisseur ou de la quantité d'électricité accumulées en chaque point de cette surface. L'air imperméable à l'électricité doit être regardé comme un vase dont la forme est déterminée par celle du corps électrisé ; le fluide que ce vase contient , exerce contre ses parois des pressions différentes en différens points , de telle sorte que la pression qui a lieu en certains points , est quelquefois très-grande et comme infinie , par rapport à celle que d'autres éprouvent. Dans les endroits où la pression du fluide vient à surpasser la résistance que l'air lui oppose , l'air cède , ou , si l'on veut , le vase crève , et le fluide s'écoule comme par une ouverture. C'est ce qui arrive à l'extrémité des pointes et sur les arêtes vives des corps anguleux ; car on peut démontrer qu'au sommet d'un cône , par exemple , la pression du fluide électrique deviendroit infinie si l'électricité pouvoit s'y accumuler. A la surface d'un ellipsoïde allongé , la pression ne devient infinie en aucun point ; mais elle sera d'autant plus considérable aux deux pôles , que l'axe qui les joint sera plus grand par rapport au diamètre de l'équateur. D'après les théorèmes que je viens de citer , cette pression sera à celle qui a lieu à l'équateur du même corps , comme le carré de l'axe des pôles est au carré du diamètre de l'équateur ; de manière que si l'ellipsoïde est très-allongé , la pression électrique pourra être très-foible à l'équateur , et surpasser la résistance de l'air aux pôles. Ainsi , lorsqu'on électrise une barre métallique qui a la forme d'un ellipsoïde très-allongé , le fluide électrique se porte principalement vers ses extrémités , et il s'échappe par ces deux points , en vertu de son excès de pression sur la résistance que l'air lui oppose. En général , l'accroissement indéfini de la pression électrique , en certains

points des corps électrisés, fournit une explication naturelle et précise de la faculté qu'ont les pointes de dissiper dans l'air non-conducteur le fluide électrique dont elles sont chargées.

Le principe dont je suis parti pour déterminer la distribution du fluide électrique à la surface d'un corps isolé, s'applique également au corps d'un nombre quelconque de corps conducteurs soumis à leur influence mutuelle : pour que tous ces corps demeurent dans un état électrique permanent, il est nécessaire et il suffit que la résultante des actions des couches fluides qui les recouvrent, sur un point quelconque pris dans l'intérieur de l'un de ces corps, soit égale à zéro : cette condition remplie, le fluide électrique sera en équilibre à la surface de chacun de ces corps, et il n'exercera aucune décomposition du fluide qu'ils renferment dans leur intérieur, et qui s'y trouve à l'état naturel. L'application de ce principe fournira, dans chaque cas, autant d'équations que l'on considérera de corps conducteurs, et ces équations serviront à déterminer l'épaisseur variable de la couche électrique sur ces différens corps. S'il se trouvoit, en outre, près de ceux-ci, d'autres corps qui fussent absolument non-conducteurs, il faudroit avoir égard à leur action sur le fluide répandu à la surface des corps conducteurs; mais comme le fluide électrique ne peut prendre aucun mouvement dans l'intérieur des corps non-conducteurs, on n'auroit, par rapport aux corps de cette espèce, aucune condition à remplir, et le nombre des équations du problème sera toujours égal à celui des corps conducteurs.

Je me suis borné dans ce Mémoire à donner ces équations pour le cas de deux sphères de différens rayons, formées d'une matière parfaitement conductrice, et placées à une distance quelconque l'une de l'autre. Les deux équations que j'ai trouvées sont aux différences finies, à deux variables indépendantes et à différences variables : on les réduit d'abord à deux autres équations à une seule variable indépendante, et la solution du problème ne dépend plus que de leur intégration. Lorsque les deux sphères se touchent, ces équations s'intègrent sous une forme très-simple par des intégrales définies. C'est ce cas particulier que je me suis spécialement attaché à résoudre, et l'on trouvera, dans la suite de ce Mémoire, des formules au moyen desquelles on peut calculer l'épaisseur de la couche électrique en chaque point de chacune des deux sphères. Cette épaisseur est nulle au point de contact, c'est-à-dire que quand deux sphères dont les rayons ont entre eux un rapport quelconque, sont mises en contact et électrisées en commun, le calcul montre qu'il n'y a jamais d'électricité au point par

lequel elles se touchent. Ce résultat remarquable est pleinement confirmé par l'expérience, ainsi qu'on peut le voir dans les Mémoires que Coulomb a publiés sur ce sujet (1).

Dans le voisinage du point de contact, et jusqu'à une assez grande distance de ce point, l'électricité est très-foible sur les deux sphères : lorsqu'elle commence à devenir sensible, elle est d'abord plus intense sur la plus grande des deux surfaces ; mais elle croît ensuite plus rapidement sur la plus petite ; et au point diamétralement opposé à celui du contact sur cette sphère, l'épaisseur de la couche électrique est toujours plus grande qu'elle ne l'est au même point sur l'autre sphère. Le rapport des épaisseurs de la couche électrique en ces deux points augmente à mesure que le rayon de la petite sphère diminue ; mais cet accroissement n'est pas indéfini ; il tend au contraire vers une limite constante que le calcul détermine, et qui est exprimée par une transcendante numérique, égale à 4,2 à-peu-près. Coulomb a aussi conclu de ses expériences que ce même rapport s'approche continuellement d'être égal à quatre et une fraction qu'il n'a pas assignée (2).

Lorsque l'on sépare deux sphères qui étoient primitivement en contact, chacune d'elles emporte la quantité totale d'électricité dont elle est recouverte ; et après qu'on les a soustraites à leur influence mutuelle, cette électricité se distribue uniformément sur chaque sphère. Or, j'ai déduit de mon analyse le rapport des épaisseurs moyennes du fluide électrique sur les deux sphères, en fonction du rapport de leurs rayons ; la formule à laquelle je suis parvenu renferme donc la solution de ce problème de physique : *Trouver suivant quel rapport l'électricité se partage entre deux globes qui se touchent, et dont les rayons sont donnés ?* La formule fait voir que ce rapport est toujours moindre que celui des surfaces ; de sorte qu'après la séparation des deux globes, l'épaisseur de la couche électrique est toujours la plus grande sur le plus petit des deux. Le quotient de cette plus grande épaisseur, divisée par la plus petite, augmente à mesure que le plus petit rayon diminue ; mais ce quotient tend vers une limite constante que l'on trouve égale au carré du rapport de la circonférence au diamètre, divisé par six, quantité dont la valeur est à-peu-près  $\frac{1}{2}$ , ainsi, quand on pose sur une sphère électrisée une autre sphère d'un diamètre très-petit relativement au diamètre de la première, l'électricité se partage entre ces deux corps, dans le rapport d'environ cinq fois la petite surface à trois fois

(1) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1787.

(2) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1787, pag. 457.

la grande. Dans les diverses expériences que Coulomb a faites pour mesurer le rapport dont nous parlons, il a constamment trouvé qu'il est moindre que celui des surfaces, et toujours au-dessous du nombre 2; d'où il avoit conclu que 2 est la limite que ce rapport atteindroit, si le rayon de la petite sphère devenoit infiniment petit (1); mais quoique cette limite ne fût pas de nature à pouvoir se déterminer exactement par l'expérience, on voit que celle qu'il avoit soupçonnée ne diffère que d'environ un cinquième de la véritable limite donnée par le calcul.

On ne verra sans doute pas sans intérêt l'accord remarquable qui existe entre le calcul et les expériences publiées il y a vingt-cinq ans, par l'illustre physicien que j'ai déjà plusieurs fois cité. J'ai trouvé dans les Mémoires de Coulomb, les résultats numériques de quatorze expériences qui ont pour objet de déterminer le rapport des quantités totales d'électricité sur deux sphères en contact de différens rayons, et celui des épaisseurs de la couche électrique en différens points de leurs surfaces. La plupart de ces résultats sont des moyennes entre un grand nombre d'observations faites avec le plus grand soin, au moyen de la balance électrique; l'auteur a tenu compte de la perte du fluide électrique par l'air; les nombres qu'il a publiés sont corrigés de cette perte, et à-peu-près les mêmes que si l'air étoit absolument imperméable, comme la théorie le suppose; ils sont donc comparables à ceux qui résultent de nos formules; et, pour en faciliter la comparaison, j'ai calculé tous les rapports que Coulomb a mesurés: et j'en ai formé plusieurs tableaux que l'on trouvera dans la suite de ce mémoire. La différence moyenne entre les résultats de ces quatorze observations et ceux du calcul, ne s'élève pas à un trentième de la chose que l'on veut déterminer.

Tant que l'on ne considère qu'un seul corps électrisé, ou plusieurs corps qui se touchent de manière que le fluide électrique puisse passer librement d'un corps sur un autre, on n'a jamais qu'un seul des deux fluides répandu sur les surfaces de tous ces corps, que je suppose toujours parfaitement conducteurs; cependant j'ai voulu montrer par un exemple comment l'analyse s'applique également au cas où les deux fluides se trouvent à-la-fois sur une même surface: j'ai choisi, pour cela, le cas de deux sphères qui ne se touchent pas, et qui sont au contraire séparées par un intervalle très-grand par rapport à l'un des deux rayons. La considération de cette grande distance simplifie les formules et les résultats, et permet de discuter facilement tout ce

(1) Mémoires cités, pag. 437.

qui arrive sur la petite sphère. Si l'on suppose que celle-ci n'étoit pas électrisée primitivement, et qu'elle ne le soit que par l'influence de la grande sphère, on trouve, comme cela doit être en effet, que l'électricité contraire à celle de la grande sphère, se porte vers le point qui en est le moins éloigné, et l'électricité semblable, vers le point opposé; les électricités contraires en ces deux points sont à-peu-près égales, ou du moins leur rapport diffère d'autant moins de l'unité, que la distance entre les deux sphères est plus grande; en même-temps la ligne de séparation des deux fluides sur la petite sphère se rapproche de plus en plus du grand cercle perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres; de sorte qu'à une très-grande distance, cette ligne partage la petite sphère en deux parties à-peu-près égales. Au reste, quelles que soient les électricités primitives de deux sphères très-éloignées l'une de l'autre, le calcul donne, par des formules très-simples, la quantité et l'espèce de l'électricité en chaque point de l'une et de l'autre des deux surfaces. Il n'existe pas d'expériences faites jusqu'à présent, auxquelles on puisse comparer les formules; mais on trouve dans les Mémoires de Coulomb un fait curieux qu'il a observé, et qui, par sa liaison avec ces mêmes formules, peut encore fournir une nouvelle confirmation de la théorie.

Si l'on a deux sphères de rayons inégaux, électrisées positivement, et qui soient d'abord en contact; que l'on détache la petite sphère et qu'on l'éloigne de la grande, on trouve que l'électricité qui étoit nulle au point de contact, devient positive sur la grande sphère, et négative sur la petite; l'électricité négative du point de la petite sphère le plus voisin de la grande subsiste jusqu'à une certaine distance, à laquelle elle est zéro, comme au point de contact, et au-delà de laquelle elle devient positive. Cette distance est d'autant plus grande, que les rayons des deux sphères diffèrent davantage l'un de l'autre; mais Coulomb a remarqué que quand l'un des rayons est le sixième, ou moindre que le sixième de l'autre, la distance du second zéro atteint son *maximum*, et ne varie plus sensiblement: il a trouvé qu'à cette limite, l'intervalle qui sépare les deux sphères est un peu moindre que la moitié du rayon de la grande (1). Or, on peut appliquer à ce cas les formules relatives à deux sphères dont la distance mutuelle est très-grande par rapport à l'un des deux rayons; en supposant en outre ce rayon très-petit par rapport à l'autre, on trouve qu'il y a effectivement une distance pour

(1) Son diamètre étant exprimé par 11, cet intervalle est égal à  $2 + \frac{1}{11}$ ; ce qui donne  $\frac{22}{11}$ , pour ce même intervalle divisé par le rayon. (Pag. 450 des Mémoires cités.)

laquelle l'électricité est nulle au point de la petite sphère le plus voisin de la grande : en deçà l'électricité de ce point est négative , et au-delà elle est positive , conformément à l'expérience ; de plus , le calcul donne , pour cette distance , une quantité un peu plus grande que le tiers du rayon de la grande sphère ; la distance observée et la distance calculée sont donc toutes deux comprises entre le tiers et la moitié de ce rayon ; et quoique la première surpasse un peu la seconde , les deux résultats s'accordent aussi bien qu'on peut le désirer. Leur différence doit être attribuée aux erreurs inévitables dans une observation aussi délicate , et à la perte de l'électricité par l'air , dont l'effet , ainsi qu'il est aisé de s'en assurer , est d'augmenter la distance dont il s'agit , et par conséquent de la faire paroître plus grande que la même distance calculée.

Tels sont les principaux résultats qui font l'objet de ce mémoire. Je me propose , dans la suite , de continuer ce genre de recherches , et de les étendre à d'autres cas plus compliqués , que Coulomb a aussi considérés , et sur lesquels il a publié un grand nombre d'observations qui pourront encore servir à vérifier la théorie.

---

## NOUVELLES COMBINAISONS CHIMIQUES.

---

### *Expériences de M. THÉNARD.*

Les métaux , tels que le fer , le cuivre , le platine , etc. , élevés à une haute température , décomposent le gaz ammoniac , sans rien enlever à ce gaz , ou sans rien lui céder qui soit pondérable. Après cette décomposition , le fer devient cassant ; le cuivre est d'une fragilité qui permet à peine de le toucher sans le rompre. De rouge , il devient jaune , et quelquefois blanchâtre. Ces métaux conservent leurs propriétés métalliques ; leur poids n'augmente ni ne diminue. S'ils n'agissent ( dit M. Thénard ) sur le gaz ammoniac que comme conducteurs de la chaleur , et en rendant très-intense la température intérieure du tube , il restera toujours à expliquer comment dix grammes de fil de fer décomposent complètement un courant rapide de gaz ammoniac à la chaleur rouge cerise , tandis qu'une quantité quadruple de platine en décompose tout au plus la moitié , même à une température plus élevée.

---

*Expériences de M. GAY-LUSSAC.*

M. Gay-Lussac a observé que la température de l'ébullition de l'eau, ou de tout autre liquide, dépend de la nature du vase qui contient ce liquide. Faisant bouillir de l'eau dans un matras de verre, et l'éloignant du feu, l'ébullition, après quelques instans, cesse; mais en projetant dans le matras quelques limailles métalliques, l'ébullition recommence. La température de l'ébullition d'un liquide dans deux vases, l'un de verre et l'autre de métal, peut différer de plusieurs degrés. Cette différence est pour l'acide sulfurique de quelques degrés; et pour l'eau, d'un degré environ.

Cette expérience fait connoître la cause d'un accident, autrefois très-fréquent dans la distillation des acides : la formation spontanée d'une grande quantité de vapeurs acides soulevoit la masse liquide, et cette masse, en tombant, cassoit les cornues. On évite les soubresauts en mettant dans les cornues quelques fils de platine, qui favorisent le dégagement des vapeurs, au *minimum* de température nécessaire pour la formation de ces vapeurs.

*Expériences de M. DULONG (1).*

De toutes les substances détonnantes, la plus remarquable par la rapidité de l'explosion, et la violence des percussions qui en résultent, est un liquide que M. Dulong a découvert en octobre 1811, et qu'on nomme *acide oximuriatique azoté*. Ce liquide, qu'on obtient en faisant passer un courant de gaz oximuriatique dans une dissolution de sel ammoniacal, à la température d'environ 7 à 8°, se présente sous la forme d'une huile. Sa pesanteur spécifique est plus grande que celle de l'eau; il est très-volatil, exposé à l'air, il s'évapore sans résidu. Mis en contact avec le phosphore, il produit une violente détonation. M. Dulong pense que dans la détonation, tous les élémens de cette substance sont séparés et ne forment aucune nouvelle combinaison. Il auroit poursuivi ce genre de recherches s'il n'exposoit pas aux plus grands dangers; après avoir perdu un œil, il faillit encore être victime d'un accident très-grave. Le courage et la sagacité honorent le savant, à qui l'on doit de pareilles découvertes.

(1) Admis élève à l'Ecole Polytechnique, en l'an 10 (1801).

## S. III. — ANNONCES.

*Journal de l'Ecole Polytechnique*, publié par le conseil d'instruction, 1 vol. in-4°, cahiers 7 et 8, contenant les leçons données, en 1795, à l'ancienne école Normale, par MM. LAGRANGE et LAPLACE. On a joint à ce cahier le mémoire de Fermat, sur le contact des sphères, traduit par M. HACHETTE.

M. Lagrange a donné cinq leçons ; la 1<sup>re</sup>. sur l'arithmétique, les fractions et les logarithmes ; la 2<sup>e</sup>. sur les opérations de l'arithmétique ; la 3<sup>e</sup>. sur la résolution des équations du troisième et du quatrième degré ; la 4<sup>e</sup>. sur les équations numériques ; la 5<sup>e</sup>. sur l'usage des courbes dans la solution des problèmes.

Les leçons de M. Laplace sont au nombre de dix.

- 1<sup>re</sup>. *Leçon*. Programme. — De la numération et des opérations de l'arithmétique.
- 2<sup>e</sup>. *Leçon*. Sur les fractions, les puissances et l'extraction des racines ; les proportions, les progressions et les logarithmes.
- 3<sup>e</sup>. *Leçon*. Des premières opérations de l'algèbre ; des puissances et des exposans.
- 4<sup>e</sup>., 5<sup>e</sup>. et 6<sup>e</sup>. *Leçons*. Sur la Théorie des Equations.
- 7<sup>e</sup>. *Leçon*. Sur la géométrie élémentaire. Notions sur les limites. Principes de trigonométries rectiligne et sphérique.
- 8<sup>e</sup>. *Leçon*. Sur l'application de l'algèbre à la géométrie.
- 9<sup>e</sup>. *Leçon*. Sur le nouveau système des poids et mesures.
- 10<sup>e</sup>. *Leçon*. Sur les probabilités. La théorie analytique des probabilités est l'objet d'un ouvrage que M. Laplace a publié l'année dernière (1812).

On se rappellera que c'est pour la même Ecole Normale que M. Monge a écrit la *Géométrie descriptive* ; ce traité est le complément des leçons de mathématiques données à cette école.

*Théorie des fonctions analytiques*, par J. - L. LAGRANGE, 2<sup>e</sup>. édition, 1813, revue et augmentée par l'auteur.

Cet ouvrage, 1<sup>re</sup>. édition, 1797, forme le 9<sup>e</sup>. cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*. Il a été suivi de leçons données à la même école en 1799. Ces leçons, sur le calcul des fonctions, forment le 12<sup>e</sup>. cahier et le supplément de ce cahier.

*Elémens de Géométrie*, 9<sup>e</sup>. édition, 1812, in-8°. } Par M.  
*Exercices de Calcul intégral*, in-4°, 1811. }  
*Essai sur la Théorie des Nombres*, 2<sup>e</sup>. édit., 1808. } LEGENDRE.

*Cours de Mathématiques*, par M. LACROIX.

Arithmétique, 11<sup>e</sup>. édition, 1811; Algèbre, 10<sup>e</sup>. édition, 1812; Géométrie, 9<sup>e</sup>. édition, 1811; Complément d'Algèbre, 3<sup>e</sup>. édition, 1804; Complément de Géométrie, 3<sup>e</sup>. édition, 1808; Calcul différentiel et integral, in-4<sup>o</sup>, 2<sup>e</sup>. édition, 1<sup>er</sup>. volume, 1812; Abrégé de ce Calcul, in-8<sup>o</sup>, 2<sup>e</sup>. édition, 1806.

*Essai de Géométrie analytique*, 5<sup>e</sup>. édition, 1813, par M. BIOT.

*De la Richesse Minérale*, par M. HERON-DE-VILLEFOSSE, Ingénieur des Mines, in-4<sup>o</sup>, 1<sup>er</sup>. volume, division économique.

*De la Défense des Places fortes*; ouvrage composé pour l'instruction des Elèves du Corps du Génie, par M. CARNOT, 3<sup>e</sup>. édition, in-4<sup>o</sup>, 1812.

*Mémoire sur la Guerre souterraine*, par M. COUTÈLE, Officier du Génie, in-4<sup>o</sup>. Savone, 1812.

*Exposé de la situation de l'Empire, présenté au Corps Législatif, dans sa séance du 25 février 1813, par S. Exc. M. le Comte de Montalivet, Ministre de l'Intérieur.*

#### EXTRAIT.

En 1809, le nombre des élèves des Lycées n'étoit que de 9500, dont 2700 externes, et 6800 pensionnaires;

Aujourd'hui, le nombre des élèves est de 18000, dont 10000 externes, et 8000 pensionnaires.

Cinq cent dix collèges donnent l'instruction à 50000 élèves, dont 12000 pensionnaires.

Dix-huit cent soixante-dix-sept pensions ou institutions particulières sont fréquentées par 47000 élèves.

Trente-un mille écoles primaires donnent l'instruction du premier degré à 920000 jeunes garçons. Ainsi un million de jeunes français reçoit le bienfait de l'instruction publique.

L'école normale de l'Université forme des sujets distingués dans les sciences, dans les lettres, dans la manière de les enseigner. Ils portent chaque année dans les lycées les bonnes traditions, les méthodes perfectionnées.

Les 35 académies de l'Université ont 9000 auditeurs; les deux tiers de ces élèves suivent les cours de droit et de médecine.

L'école Polytechnique donne tous les ans aux écoles spéciales du génie, de l'artillerie, des ponts-et-chaussées et des mines, 150 sujets déjà recommandables par leurs connoissances.

Les écoles de Saint-Cyr, de Saint-Germain, de la Flèche, fournissent tous les ans 1500 jeunes gens pour la carrière militaire.

## ÉVÉNEMENTS PARTICULIERS.

*Ecole impériale des Ponts-et-Chaussées.*

Son Exc. le Ministre de l'Intérieur a fait, le 31 décembre, à l'Ecole impériale des Ponts-et-Chaussées, la distribution solennelle des prix du cours de 1812.

Les pièces de concours avoient été jugées, suivant l'usage, par un Jury composé d'une commission de membres de la première Classe de l'Institut impérial de France, et des Inspecteurs-Généraux des Ponts-et-Chaussées.

Son Exc. le Ministre de l'Intérieur; M. le Comte Molé, Conseiller-d'Etat, Directeur-Général des Ponts-et-Chaussées, et M. Prony, Inspecteur-Général, Directeur de l'Ecole, ont successivement adressé la parole aux Elèves.

Voici le tableau des prix décernés d'après le jugement du Jury.

OBJETS DU CONCOURS.	NOMS DES ÉLÈVES.	PRIX.
<i>Problème de Mécanique.....</i>	{ GUILLETON.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ CORIOLIS.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
<i>Style.....</i>	{ BERNARD.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ BELLANGER.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
<i>Carte ou Ecriture moulée.....</i>	{ BAND.....	Prix.
<i>Route et Pontceau.....</i>	{ MOSCA.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ DRAPPIER.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
<i>Coupe des Pierres.....</i>	{ CARIORMAZZI.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ COUTURAT.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
<i>Pont en charpente.....</i>	{ LEBLANC.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ LACORDAIRE.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
<i>Projet de Canal.....</i>	{ SURVILLE.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ BELLANGER.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
<i>Projet d'Ecluse.....</i>	{ MONEUSE.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ GENSOLEN.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
ARCHITECTURE :		
<i>Maison de campagne.....</i>	{ DE BESSON.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ MOSCA.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
ARCHITECTURE :		
<i>Etablissement destiné à contenir l'approvisionnement de vivres pour 40 vaisseaux de ligne.....</i>	{ SURVILLE.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ JOUVIN.....	2 <sup>e</sup> . Prix.
TRAVAUX MARITIMES :		
<i>Forme couverte.....</i>	{ LEBLANC.....	1 <sup>er</sup> . Prix.
	{ PANICHOT.....	2 <sup>e</sup> . Prix.

*Ecole impériale Polytechnique.*

Le corps enseignant de l'Ecole Polytechnique et les Elèves ont offert à Sa Majesté huit chevaux d'artillerie légère équipés.

## §. IV. — PERSONNEL.

*Promotions des anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs. (Voyez les promotions précédentes, pag. 297 et 370 de ce volume.)*

### ARTILLERIE DE TERRE.

M. Allix, cité page 127, tome 1<sup>er</sup>, comme ayant été autorisé à suivre l'instruction de l'Ecole Polytechnique, est général de division.

*Majors.* — MM. Bernard, Lallemand, Brechtel.

*Chefs de Bataillon.* — MM. Paulin, Failly, Richard, Pache, Evain, Forceville, Duchand (nommé en 1809).

### GÉNIE MARITIME.

*Ingénieur de Marine, Chef de Bataillon.* — M. Moreau, membre de la Légion-d'Honneur et du conseil des constructions navales près de S. Exc. le Ministre de la Marine.

*Sous-Ingénieur, Chef de Bataillon.* — M. Gilbert.

### GÉNIE MILITAIRE.

*Colonels.* — MM. Daullé, Prevost-Vernois.

*Chefs de Bataillon.* — MM. Teissier, Finot, Girardin, Christin, Saint-Hillier.

### PONTS-ET-CHAUSSÉES.

*Ingénieurs en chef.* — MM. Blanchard (Jean-Louis), Robiquet (François).

### UNIVERSITÉ.

*Inspecteurs généraux.* — MM. Rendu (Ambroise), Gueneau (Philibert).

*Notaire.* — M. Rendu (Athanase).

*Sous-Chef du bureau des académies.* — M. Douyau.

### MAISON DE L'EMPEREUR.

M. Bernard, colonel du génie, *aide-de-camp* de S. M.

*Officiers d'ordonnance.* — MM. Gourgaud, d'Hautpoul, Delaplace, Lamezan, Pretet.

*Nominations à des places dans l'Ecole Polytechnique.*

M. Becquerel (Antoine-César), capitaine du génie, ex-élève de l'Ecole Polytechnique, a été désigné par S. Exc. le Ministre

de la Guerre , pour remplir pendant une année l'emploi de sous-inspecteur des études , en remplacement de M. le capitaine Morlet , appelé à d'autres fonctions.

---

M. Rostan , membre de la Légion d'Honneur , adjudant sous-lieutenant , a été nommé au grade de lieutenant , par décret impérial du 19 août 1812 , en remplacement de M. Letaublon , admis à la retraite.

M. Prudhomme (Louis) , membre de la Légion-d'Honneur , sergent au 1<sup>er</sup>. régiment de chasseurs de la garde impériale , a été nommé adjudant sous-officier , en remplacement de M. Rostan.

---

M. Clerc , chef de topographie depuis le 20 novembre 1806 (par décision de S. Exc. M. le Gouverneur) , a été promu au grade de chef de bataillon du corps impérial des ingénieurs-géographes.

---

M. Pommiès , professeur au lycée Napoléon , a été nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse à l'Ecole Polytechnique , pour l'année scolaire 1812—1813.

---

La treizième session du Conseil de Perfectionnement a été ouverte le 14 novembre 1812 , et terminée le

#### LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

*Gouverneur de l'Ecole , Président :*

S. Exc. M. le comte de Cessac.

*Examineurs pour l'admission dans les services publics ,  
membres désignés par la loi :*

MM. Legendre , Lacroix , Ferry , Dulong.

*Membres de l'Institut national , pris , selon la loi , dans la  
Classe des Sciences Physiques et Mathématiques :*

MM. les comtes Laplace , Lagrange , Berthollet.

*Désignés par S. Exc. le Ministre de la Guerre :*

MM. Cotty , officier supérieur d'artillerie ; le chevalier Allent , officier supérieur du génie ; Bottée , administrateur général des poudres et salpêtres ; Jacotin , colonel au corps des ingénieurs-géographes.

*Désignés par S. Exc. le Ministre de la Marine :*

MM. le comte Sugny, inspecteur-général d'artillerie de la marine; le baron Sané<sup>(1)</sup>, inspecteur-général du génie maritime.

*Désignés par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur :*

MM. Prony, inspecteur-général des ponts-et-chaussées; Lefebvre d'Hellencourt, inspecteur-général des mines.

*Directeur des études de l'Ecole Polytechnique :*

M. Durivau.

*Commissaires choisis par le conseil d'instruction de l'Ecole, parmi ses membres :*

MM. le comte Monge, Gardeur-Lebrun, Gay-Lussac, Thénard.

*Secrétaire du Conseil :*

M. Marielle, quartier-maître trésorier de l'Ecole Polytechnique.

---

## CONCOURS DE 1812.

---

*Examineurs pour l'admission dans les Services publics.*

*Analyse, Mécanique. — MM. Legendre, Lacroix, examinateurs permanens.*

*Géométrie descriptive; analyse appliquée à la Géométrie; Physique. — M. Ferry.*

*Chimie. — M. Dulong (Voy. pag. 477).*

*Examineurs pour l'admission à l'Ecole Polytechnique.*

Paris..... M. Reynaud.

Tournée du sud-ouest..... M. Dinet.

Tournée du nord-est..... M. Labey.

Tournée du sud-est..... M. Francœur.

Les examens ont été ouverts le 1<sup>er</sup>. août, et les cours, pour

---

(1) Remplacé par M. Rolland, chef du Génie maritime et membre du Conseil des Constructions, à Paris.

la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, le 29 septembre 1812, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

Quatre cent soixante-dix-sept candidats ont été examinés ;

## S A V O I R :

A Paris.....	218	} 477.
Dans les départemens.....	259	

Sur ce nombre ont été jugés admissibles ;

## S A V O I R :

De l'examen de Paris.....	184	} 357.
Des départemens.....	173	

6 candidats ont été rejetés du concours, et 4 reculés dans l'ordre d'admission, par défaut d'exercice dans l'art du dessin.

7 candidats ont de même été rejetés du concours, et 2 reculés, par défaut d'instruction suffisante en littérature latine.

3 ont été rejetés à cause de l'analyse grammaticale, et 2 pour s'être communiqué leurs traductions.

1 candidat a été écarté du concours pour raison d'infirmité corporelle.

Le nombre des candidats admis par le Jury a été de 184, sur ce nombre 5 ont donné leur démission. Le nombre des candidats admis est resté par conséquent de 179 ;

## S A V O I R :

De Paris.....	99	} ..... 179
Des départemens.....	80	

Nombre des élèves admis à l'Ecole jusqu'au 1<sup>er</sup>. novembre 1811..... 2638

Total des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement,

A Paris.....	1352	} ..... 2817
Dans les départemens.....	1465	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole ;

## S A V O I R :

A Paris.....	2917
Dans les départemens.....	3638

Total des candidats..... 6555

## LISTE,

## PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

*Des 179 candidats admis à l'Ecole impériale Polytechnique, suivant la décision du Jury, du 29 septembre 1812.*

*Nota.* Les listes arrêtées par le Jury contenoient 184 candidats; mais sur ce nombre il y en a 5 qui n'ont pas rejoint et ont envoyé leur démission.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Amelot.	Claude-Louis.	Besançon.	Doubs.
André.	Claude-Bernard-Emile.	Sémur.	Côte-d'Or.
Babinet.	Jacques.	Lusignan.	Vienne.
Balleroy.	Jean-Baptiste-Décadi.	Pont-l'Evêque.	Calvados.
Bauchetet.	Jean.	Châlons.	Saône-et-Loire.
Bayard.	Charles.	Baltimore.	Etats-Unis d'Am.
Beauvais (de).	Ambroise-Lambert.	Paris.	Seine.
Becquey.	François.	Châlons.	Marne.
Bernard Chambinière.	Emile.	Niort.	Deux-Sèvres.
Bert.	Zéphirin-René.	Poitiers.	Vienne.
Blanq-Desiles.	J.-J.-Marie-Mathieu.	Bourg.	Ain.
Blanquet - Duchayla.	Armand.	Chartres.	Eure-et-Loire.
Bleuart.	Jean-Raphaël.	Paris.	Seine.
Boisgiraud.	Jean-Pierre-Thomas.	Gemozac.	Charente-Infér.
Boisson.	Laurent.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Boutelaud.	Pierre-Amédée.	Cognac.	Charente.
Bouvier.	Louis-Charles.	Genève.	Léman.
Bouzane-Desmazery.	Gabriel.	Tours.	Indre-et-Loire.
Bruneau.	Michel-Julien-René.	Cossé-le-Vivien.	Mayenne.
Brunet.	Louis.	Châlons s.-Saône	Saône-et-Loire.
Burnier.	Andre-Elisabeth.	Chambéry.	Mont-Blanc.
Canton.	Bernard-Prosper.	Oleron.	Basses-Pyrénées.
Carnot.	Sadi.	Paris.	Seine.
Cauchy.	Philippe-François.	Abbeville.	Somme.
Cas.	Cl.-Gasp.-L.-Étienne.	Gap.	Hautes-Alpes.

N O M S.	P R É N O M S.	L I E U X DE NAISSANCE.	D É P A R T E M E N S.
Chapelié.	Jean-Jacques-Edouard.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Chapotin.	Achille.	Auxerre.	Yonne.
Chardonneau.	Joseph-Fortuné.	Rocheport.	Charente-Infer.
Charles.	Michel.	Epervon.	Eure-et-Loire.
Chausson.	Simon-Pierre-Florent.	Avallon.	Yonne.
Chere.	Joseph-Bonaventure.	Offlange.	Jura.
Cicille.	François-Marie.	Nemours.	Seine-et-Marne.
Coignet.	Robert-Paul.	Paris.	Seine.
Colson.	Pierre-Charles.	Grenoble.	Isère.
Conscience.	François-Pierre.	Nanci.	Meurthe.
Corneilhan.	Jean.	Fraisinet.	Lot.
Cornely.	François-Xavier.	Boppard.	Rhin-et-Moselle.
Coste.	Louis-Marie-Prosper.	Béziers.	Hérault.
Couillerot-Des- charières.	Charles-Saint-Amand.	Paris.	Seine.
Coullet.	Pierre.	Saint-Etienne.	Loire.
Cournand.	Timoléon-Julien-Raym.	Paris.	Seine.
Cournon.	Gilbert-Henri-Amable.	Aigueperse.	Puy-de-Dôme.
Couty.	Jean-Baptiste.	Bonnat.	Haute-Vienne.
Creuly.	Casimir.	Cherbourg.	Manche.
D'albiat.	Pierre-Hubert.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Dalican.	Charles-Joseph-Hypp.	Château-Thierry.	Aisne.
Dauche.	Emile.	Paris.	Seine.
David.	Nicolas-Henri.	Verdun.	Meuse.
Delainare.	Adolphe-Edvige-Alph.	Paris.	Seine.
Delaporte.	Théodore.	Remaisnil.	Somme.
Delaroche.	Grégoire.	Villantrois.	Indre.
Delmas.	Anacréon.	Marsillargues.	Hérault.
Demonferrand.	Jean-Baptiste-Firmin.	Issoudun.	Indre.
Desmaisières.	Desiré-François.	Ming.	Nord.
Desmaisières.	Léandre-Ant.-Joseph.	Derendorff.	près Dusseldorf.
Desse.	Louis-Etienne.	Carignan.	Ardennes.
Devaux.	Jean-Adolphe-Joseph.	Neuss.	Roër.
Dollone.	Charles-Pierre.	Fauconcourt.	Vosges.
Doucet.	Jean-Denis-Alexandre.	Langé.	Indre.
Dubain.	Jules-Joseph.	Beaugency.	Loiret.
Dubois.	Jean-Louis.	Paris.	Seine.
Dufraisse.	Julien-Pierre.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Duport.	Jean-Louis-Amédée.	Cheux.	Calvados.
Durivan.	Hyppol.-Jean-Jacques.	Quimper.	Finistère.
Duvivier.	Hyppolite.	Lyon.	Rhône.
Duvivier.	Françiadé-Fleurus.	Rouen.	Seine-Inferieure.
Escanyé.	Ferd.-Jos.-Jean-Sébast.	Vinça.	Pyrenées-Orient.
Fabre.	Augustin.	Draguignan.	Var.
Falret-Lagasque	Ambroise-Publicola.	Marcilhac.	Lot.
Faulte du Puy- parlier.	Auguste-Pierre-Jacques	Linoges.	Haute-Vienne.
Fleurv.	Claude-Raulin.	Ecquemarre.	Eure.
Forsait.	Alexandre.	Rouen.	Seine-Inferieure.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Foyer.	Clément.	Beauvais.	Oise.
François.	Prosper.	Paris.	Seine.
Gacon.	Antoine-Joseph.	Paris.	Seine.
Gaillard.	Frédéric.	Loudun.	Vienne.
Gambini.	Joseph-Henri-Louis.	Baldichieri.	Marengo.
Gavard.	Jacques-Dom.-Charles.	Paris.	Seine.
Gay.	Augustin.	Dôle.	Jura.
Geneix.	Jean.	Clermont-Ferr.	Puy-de-Dôme.
Germain.	François Augustin.	Réchicourt - le - Château.	Meurthe.
Giorgini.	Gaétan-Vincent-Benoît.	Montignoso.	Pr. de Lucques.
Godebert.	Charles-Franç.-César.	Brest.	Finistère.
Godin.	Edouard-Florent.	Huy.	Ourte.
Grangeneuve.	Maurice.	Bordeaux.	Gironde.
Guillery.	Hippolyte.	Versailles.	Seine-et-Oise.
Guy.	Pierre-Gabrie'l.	Agde.	Hérault.
Henryot.	Charles-Théodore.	Nogent.	Haute-Marne.
Hoart.	Pierre-Denis.	Paris.	Seine.
Huyn.	Gilbert.	Paris.	Seine.
Imbert, dit St.-			
Brice.	Penn-Affrodise-Justin.	Brionde.	Haute-Loire.
Jeannin.	Jean-Baptiste.	Paris.	Seine.
Johanys.	Pierre-Ferdinand.	Romans.	Drôme.
Lacoste.	Hubert-Léonidas.	Pont-à-Mousson.	Meurthe.
Laffenillade.	Jean-Pierre.	Vic-Bigorre.	Hautes-Pyrénées.
Laroyenne.	Célestin.	Froide-Terre.	Haute-Saône.
Laurent.	Paul.	Paris.	Seine.
Lebas.	Marie-Tranquille.	Le Luc.	Var.
Le Corbeiller.	Frédéric.	Brunoy.	Seine-et-Oise.
Lenglet.	Etienné-Henri-Franç.	Bapaume.	Pas-de-Calais.
Léonard.	Auguste-Franç.-Brutus	Paris.	Seine.
Malaret.	Jean-Victor-Scovola.	Pezenas.	Hérault.
Mareschal.	Armand-Adrien.	Salmaize.	Côte-d'Or.
Marminia.	Charles-Fr.-Narcisse.	Doullens.	Somme.
Marque-Doncour	Hector-Jean.	Lanty.	Haute-Marne.
Martin.	François-Marie-Emile.	Soissons.	Aisne.
Martin.	Jean-Baptiste-Aristide.	Consolens.	Charente.
Martner.	Henri-Camille.	Lunéville.	Meurthe.
Méjasson.	Noel-Benoît.	La Pacaudière.	Loire.
Ménard.	Ch.-Mar.-Fr.-Stanislas	Blois.	Loir-et-Cher.
Mengin.	Fr.-Jos.-Marie-Gabriel	Nanci.	Meurthe.
Métais.	Antoine-Louis.	Auteuil.	Seine.
Michaud.	J.-B.-François-Justin.	Conliège.	Jura.
Michelin.	Guillaume-Louis-Adelle	Paris.	Seine.
Millot.	Louis.	Philadelphie.	Etats-Unis d'Am.
Miollis.	Augustin.	Aix.	Bouc-du-Rhône.
Molinos.	Achille-Louis-Nicolas.	Paris.	Seine.
Moly.	Amaus-Edouard.	Sales-la-Source.	Aveyron.
Moutte.	Félix-Antoine-Joseph.	Douai.	Nord.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENTS.
Noel.	François-Auguste.	Crouy sur-Ourcq	Seine-et-Marne.
Noel.	Nicolas-Jacques.	Carteret.	Manche.
Noel.	Auguste-Franç.-Pierre.	Châlons.	Marne.
Odernheimer.	Frédéric.	Oberingelheim.	Mont-Tonnerre.
Ollivier.	Maurice.	Torcé	Mayenne.
Osmoud.	Abel.	Saint-Fbremond de Bon-Fossé.	Manche.
Ozanon.	Claude.	Châlons.	Saône-et-Loire.
Pacotte.	Léon.	Paris.	Seine.
Parchappe.	Narcisse.	Epervay.	Marne.
Petit.	Jean-Jacques.	Besançon.	Doubs.
Petit.	Narcisse.	Bezu-la-Forêt.	Eure.
Petit.	Joseph.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Pin.	François.	Lyon.	Rhône.
Pinel.	Paul-Augustin.	Le Havre.	Seine-Inférieure.
Pinot.	Ferdin.-Franç.-Pierre.	Avranches.	Manche.
Poudra.	Noel-Germinal.	Paris.	Seine.
Poullain-de-St.- Foix.	Emile.	Paris.	Seine.
Pouzin.	Franç.-Hugues-Roméo.	Montpellier.	Hérault.
Pradal.	Pierre.	Perpignan.	Pyrénées-Orient.
Prat.	Marie-Louis-Valentin.	Nayrac.	Aveyron.
Puech.	Charles-Joseph.	Brasc.	Aveyron.
Puibusque.	Jacques.	Angers.	Maine-et-Loire.
Raffard.	Antoine-Joseph.	Vaudiné-les-Scr- rières.	Ardèche.
Ranfrai - Bajon- nière.	Armand-Henri.	L'Orient.	Morbihan.
Reboul.	Henri-Romain-Aristide.	Pezenas.	Hérault.
Reibell.	Félix-Jean-Baptiste.	Strasbourg.	Bas-Rhin.
Renault.	Jean-François.	Londres.	Angleterre.
Reverdit.	Joseph.	Bargemon.	Var.
Reverony.	Henri.	Reinsberg.	Prusse.
Reydellet.	Julien-Elizée.	Nantua.	Ain.
Robelin.	Claude-Pierre.	Beaune.	Côte-d'Or.
Rochet.	Virtil.	Paris.	Seine.
Ronin.	Jacques-Auguste.	St.-Tropez.	Var.
Roux.	Jean-Chéri.	Angers.	Maine-et-Loire.
Rubin de la Mis- sonnais.	Henri-Louis.	Vitré.	Ille-et-Vilaine.
Ruel.	Joseph-Hilarion.	Belencier.	Var.
Sain Mannevieux	Paul-Emile.	Lyon.	Rhône.
Salneuve.	Jean-Félix.	Paris.	Seine.
Santeul.	Mirthil.	St.-Germain.	Seine-et-Oise.
Sazerac de Forges	André-Benoît.	Angoulême.	Charente.
Séré.	Jean-Henri-Edouard.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Silvestre.	Louis-Catherine.	Paris.	Seine.
Siruguet.	Jean-Jacques.	Dijon.	Côte-d'Or.
Stein.	Jean-Pierre-Guillaume.	Trèves.	Sarre.
Surdey.	Antoine-Joseph.	Besançon.	Doubs.

NOMS.	PRENOMS.	LIEUX	DÉPARTEMENTS.
		DE NAISSANCE.	
Tellier.	Jacques-Louis-Armand.	Aguetz.	Oise.
Terrasson.	Jean - Pierre - Laurent- Washington.	Paris.	Seine.
Thiéry.	Alfred.	Dunkerque.	Nord.
Tiby.	Claude-Jacques-Franç.	Paris.	Seine.
Tirel-Martinière.	Charles-François.	Grandville.	Manche.
Treins.	Jean-Baptiste.	Egletons.	Corrèze.
Verger-Desbarreaux.	Edouard.	Angers.	Maine-et-Loire.
Veyrassat.	Paul-Samuel-Jacques.	Genève.	Léman.
Vidé.	Jean-Alexandre.	La Rochelle.	Charente-Infér.
Visquain.	Jean-Baptiste-Joseph.	Tournay.	Jemmappes.
Villemain.	François-Emile.	Paris.	Seine.
Viолlette.	Antoine-Jos.-Norbert.	Fressin.	Pas-de-Calais.
Vuilleret - de - Brotte.	Nicolas-Victor.	Crotenay.	Jura.
Watbled.	Jacob.	Paris.	Seine.
Wetzell.	Joseph-Martial.	Arras.	Pas-de-Calais.

### ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

*Listes, par ordre de mérite, des élèves admis dans les services publics, depuis le 1<sup>er</sup>. novembre 1811 jusqu'au 1<sup>er</sup>. janvier 1813, suivant les décisions du Jury, présidé par S. Exc. M. le Gouverneur, et composé des examinateurs d'admission dans les services publics.*

#### ARTILLERIE DE TERRE.

*En février 1812.*

MM. Berjaud, Grégoire, Merle, Bouvet, Surineau, Policarpe, Blanc, Cohendet, Colomb, Brongniart, Voysin-Gartempe, Martin-de-Julvecourt, Thiry, Donnat, Terson-Paleville, Sehols, Gazeau - de - Labouère, Lerebours de la Pigeonnière, Pérignon, Charreyron, Planquette, Loret, Barbier, Cabrol, Mercier, Caffort, Imbert *dit* Saint-Brice (M.-T.-P.), Peloux, Vergnaud, Hubert, Gazan, Pauzié-Banne, Chailou (R.), Boussac, De Grave, Fourmond, Chouillou, Godard-de-Rivocet, Chaillon (A), Melon de Pradou, Marty, Fabian, Madelaine, Moynier, Coste, Rabaïoye, Thiéry, Rouvrois,

( 490 )

Vernety, Jarrige-Lamazorie, Karth, Giret, Corrad, Gilbert  
de Gourville, Yver, Mocquard, Chayé, Jacquiné, Balaran,  
Lelièvre..... 60

*En septembre 1812.*

MM. Métayer, Grillet-Serry, Lenfumé, Ogée, Malé-  
chard, Boucquel - Beauval, Godin, Dieudé, Luguët,  
Lejeune, Chauvet, Bertin, Coursin, Lebon-d'Haubersin,  
Monmartin, Muthuon, Guillard, Guilhou, Laugaudin,  
Marcilhac, Murat, Leroy (J.-D.), Mahieux, Bompard,  
Berdolle, Harmand, Guy (A.-M.), Crémoux, Castaing,  
Michel-D'Anserville..... 30

GÉNIE MILITAIRE.

MM. Gosselin, Blevec, Larabit, Sorel, Douet, Chiodo,  
Vieux, Lefebvre (A.-J.-M.), Moreau, Belmas, Dumay,  
Guy (J.-P.-A.), Gaide, Fabre, Ythier, Robert de Saint-  
Vincent, Forget de Barst, Lambert (C.-J.), Perreau,  
Ronmy, Le Marcis, Morin, Redouté, Gérard, Perru-  
chot, Michelot, Nether, Bruno, Urtin, Gauthier, Sibilet,  
Soleirol, Viquesnel, Dechauvenet, Olivier (A.-J.-A.)  
Dessalle, Roullion, Rousset, Fiévée, Falret, Rocquan-  
court, Liadières, Lefebvre (C.-E.), Desfeux, Tassain,  
Grimonville, Broquard-de-Bussières, Lagarrigue, Collas-  
Courval, Fauquez..... 50

INGÉNIEURS - GÉOGRAPHES.

MM. Decaëu, Benoît, Coueffin..... 3

POUDRES ET SALPÊTRES.

MM. Durand, Lermier..... 2

PONTS ET CHAUSSÉES.

MM. Billaudel, Guillemot, Lacave, Girard, Néhon,  
Dumas, Bayard, Vauquelin, Lecarpentier, Doucet..... 10

MINES.

MM. Lambert (C.-J.-E.), Despine..... 2

## CONSTRUCTION DES VAISSEaux.

MM. Larchevêque-Thibaud, Liénard, Bésuchet, Duplan. 4

## TROUPES DE LIGNE.

M. Labarbe (J.-M.), nommé sous-lieutenant dans le  
onzième régiment d'infanterie légère..... I

*Sortis de l'Ecole par démission, mort, etc.*

*Démissionnaires ou sortis sans être placés.*— MM. Ajas-  
son de Grandsagne, Arnoux, Barthes, Buisson, Bryon,  
Cornisset, Cramouzaud, Domergue, Gohard, Linden-  
meyer, Mieussens, Paulin..... 12

*N'a pas rejoint.*— M. Gilbert, élève de la promotion  
de 1811..... 1

*Morts* { *à l'Ecole.* — MM. Bottex, Godard-d'Isigny, }  
          { Monnet..... 3 } 5  
          { *hors de l'Ecole.* — MM. Crova - Vaglio, }  
          { Pressou..... 2 }

**ETAT de situation des Elèves de l'Ecole Polytechnique , à l'époque du 1<sup>er</sup>. janvier 1813.**

L'Ecole étoit composée, au 1<sup>er</sup>. novembre 1811, de 341 élèves.

Elle a perdu depuis cette époque jusqu'au 1<sup>er</sup>. janvier 1813,

**S A V O I R :**

Morts.....	5	} 18
Démisionnaires.....	12	
N'a pas rejoint.....	1	

*Admis dans les services publics.*

Artillerie de terre.....	90	} 162	} 180
Génie militaire.....	50		
Ingénieurs-Géographes.....	3		
Poudres et Salpêtres.....	2		
Ponts-et-chaussées.....	10		
Mines.....	2		
Construction des vaisseaux.....	4		
Nommé sous-lieutenant dans la ligne.....	1		

Il restoit..... 161

Elèves admis à l'Ecole à dater du 1<sup>er</sup>. novembre 1812... 179

Total des Elèves composant l'Ecole Polytechnique au  
1<sup>er</sup>. janvier 1813..... 340

**S A V O I R :**

1 <sup>re</sup> . division.....	154	} 340
2 <sup>e</sup> . division.....	186	

# TABLE

Des matières contenues dans le second volume de la  
*Correspondance sur l'Ecole Polytechnique.*

*Ce volume est composé de cinq cahiers publiés à différentes époques, depuis le mois de janvier 1809, jusqu'au mois de mars 1813. Dix-huit planches, dessinées par M. Girard, sont jointes à ce volume.*

1<sup>er</sup>. Cahier. — Janvier 1809.

§. I<sup>er</sup>. — *Sciences mathématiques.*

	Pag.
Sur la pyramide triangulaire, par M. Monge.	1—6
Sur la transformation des coordonnées, par M. Hachette.	7—13
De la ligne de séparation d'ombre et de lumière, sur les filets d'une vis triangulaire, par M. Hachette	13—17
Sur les axes principaux d'une surface du second degré, par M. Binet (J.-P.-M.).	17—20
Solution d'un problème de géométrie, par M. Baduel.	20—22
Question de minimis, résolue par MM. Billy et Puis-sant.	22
Des épicycloïdes sphériques.	22—28

§. II. — *Sciences physiques.*

Expériences de MM. Gay-Lussac et Thénard, sur la pile voltaïque, sur les acides fluorique, boracique et muriatique.	28—30
---	-------

§. III.

Annonces d'ouvrages.	30—31
----------------------	-------

§. IV et V.

Personnel.	31—33
------------	-------

Elèves admis en 1808.	34—38
Evénemens particuliers. — Admission dans les services publics.	38—42
Discours prononcé par le préfet de la Seine-Inférieure, à l'ouverture des examens d'admission à l'Ecole Polytechnique, le 5 septembre 1808.	42—47

## §. VI.

Actes du Gouvernement, 1 <sup>o</sup> . concernant le corps impérial des ingénieurs-géographes ; 2 <sup>o</sup> . sur des terrains attenant à l'Ecole Polytechnique.	47—50
Deux planches.	

2<sup>e</sup>. Cahier. — Janvier 1810.

§. I<sup>er</sup>. — Sciences mathématiques.

Sur les équations différentielles des courbes du second degré, par M. Monge.	51—54
Gnomonique. Notions préliminaires, par M. Hachette.	54—63
De la sphère tangente à quatre sphères données. — Volume d'un onglet conique. — Ombre sur le filet d'une vis triangulaire ; par M. Français.	63—74
Des surfaces diamétrales. — Des propriétés des surfaces du second degré, par M. J. Binet.	74—80
Application du théorème de Taylor au développement des fonctions $(1+x)^m$ , $a^x$ , $\log(1+x)$ , $\cos x$ , $\sin x$ ; par M. Poisson.	81—86
Sur la courbure des surfaces, par M. Dupin.	86—87
De l'épicycloïde sphérique et de sa tangente, par M. Gaultier.	87—93
Question de mathématiques proposée au concours général des lycées de Paris, année 1809. — Solution de M. Vanéechout.	93—96
Sur le centre de gravité d'une pyramide, par M. Gergonne.	96—97
Sur les fontaines de héron ; de l'héliostate, par M. Hachette.	97—102

Sur une nouvelle manière de défendre les places, par M. <i>Carnot</i> .	103—109
--	---------

## §. II. — *Sciences physiques.*

Sur la décomposition de l'eau par le diamant et par le plomb, par M. <i>Guyton-Morveau</i> .	109—112
---	---------

Analyse des matières animales et végétales, par MM. <i>Gay-Lussac</i> et <i>Thénard</i> .	112—117
--	---------

## §. III.

Annonces d'ouvrages.	117—119
----------------------	---------

## §. IV.

Personnel. — Liste des Elèves admis en 1809.	119—131
--	---------

Admission dans les services publics.	131—134
--------------------------------------	---------

## §. V.

Actes du Gouvernement.	134—136
------------------------	---------

*Deux planches* ( la 2<sup>e</sup>. planche de ce cahier appartient en même temps au 5<sup>e</sup>. cahier ).

## 3<sup>e</sup>. Cahier (\*). — *Janvier 1811.*

### §. I<sup>er</sup>. — *Sciences mathématiques.*

Des conditions qui expriment qu'une surface du second degré est de révolution, par M. <i>Bourdon</i> .	187—203
--	---------

Sur le même sujet, par MM. <i>Urban</i> , <i>Merle</i> , <i>Mondot</i> .	203—211
--	---------

Note sur le développement des puissances des sinus et des cosinus, en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, par M. <i>Poisson</i> .	212—217
---	---------

Sur les équations du quatrième degré, par M. <i>Bret</i> .	217—219
--	---------

Des nombres figurés, par M. <i>Barruel</i> .	220—227
--	---------

Démonstration analytique des théorèmes de M. <i>Dupin</i> sur la courbure des surfaces, par M. <i>Desjardins</i> .	228—236
--	---------

Questions de trigonométrie sphérique, par M. <i>Puis-sant</i> .	236—242
---	---------

(1) C'est par erreur que la première page de ce cahier est cotée 187; tous les numéros des pages qui suivent, sont trop grands de 50.

De la projection stéréographique. — Question relative à la sphère céleste. — Sur la transformation des coordonnées ; par M. <i>Hachette</i> .	242—249
Sur les surfaces du second degré , par M. <i>Bourdon</i> .	250—252
Sur les polyèdres , par M. <i>Cauchy</i> .	253—256
De l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, dont les axes ne se rencontrent pas , par M. <i>Chapuy</i> .	256—257
Extrait de l'almageste de Ptolomée , par M. <i>Brianchon</i> .	257—260
Du parallélépipède et de la pyramide triangulaire , par M. <i>Monge</i> .	261—266
Propriétés des centres de gravité , par M. <i>Blondat</i> .	267—270
Solutions de plusieurs problèmes de géométrie et de mécanique.	271—276
Résolution de deux équations à deux inconnues , par M. <i>Lefebure-de Fourcy</i> .	276—280
Problèmes de mathématiques et de physique , proposés au concours général des lycées de Paris , et résolus par MM. <i>Larabit</i> et <i>Lacave</i> .	280—281

## §. II. — *Sciences physiques.*

De la double réfraction de la lumière , de la polarisation , par M. <i>Hachette</i> .	281—289
De l'évaporation de l'eau dans le vide.	289—291
Sur le nautille marin , par MM. <i>Coessin</i> , frères.	291—293

## §. III.

Annonces d'ouvrages.	293—295
----------------------	---------

## §. IV.

Personnel.	295—301
Liste des Elèves admis à l'Ecole en 1810.	302—306
Admission dans les services publics en 1810.	306—308

## §. V.

Actes du Gouvernement concernant les services des poudres, des mines, et des ponts-et-chaussées.	309—312
<i>Cinq planches.</i>	

4<sup>e</sup>. Cahier. — Juillet 1812.S. I<sup>er</sup>. — Sciences mathématiques.

Des surfaces du second degré de révolution, et propriétés générales de ces surfaces, par M. <i>Monge</i> .	313—323
Théorème sur les surfaces du second degré, par M. <i>J. Binet</i> .	313—324
De la discussion des surfaces du second degré, au moyen de l'équation qui a pour racines les carrés des demi-diamètres principaux de ces surfaces, par M. <i>Petit</i> .	324—328
Du plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe. — De la pyramide triangulaire. — De la sphère tangente à quatre sphères données, par M. <i>Huchette</i> .	329—343
Observations barométriques, faites à l'aqueduc de Marly, par M. <i>Puissant</i> .	343—347
Démonstration élémentaire de la formule qui sert à calculer les hauteurs des montagnes, d'après les observations barométriques, par M. <i>Petit</i> .	347—353
Des caustiques par réflexion et par réfraction, par M. <i>Petit</i> .	353—358
Sur les axes principaux en mécanique, par M. <i>Lefebure-de-Fourcy</i> .	358—361
Des polygones et des polyèdres, par M. <i>Cauchy</i> .	361—367

## S. II.

Annonces d'ouvrages.	367—368
----------------------	---------

## S. III.

Personnel.	368—372
Rapport sur les études, par M. <i>Durivau</i> .	372—373
Admission à l'Ecole Polytechnique en 1811. — Liste des élèves admis.	374—379
Admission dans les services publics, même année.	379—382
Quatre planches.	

5<sup>e</sup>. Cahier. — Janvier 1813.§. I<sup>er</sup>. — Sciences mathématiques.

Géométrie de la règle, par M. <i>Brianchon</i> .	383—387
Analyse de plusieurs mémoires de géométrie, par M. <i>Dupin</i> .	387—396
Gnomonique analytique. — Trigonométrie sphérique, par M. <i>Puissant</i> .	397—409
Solution analytique du problème de la sphère tangente à quatre sphères données, par M. <i>Français</i> .	409—410
Remarque sur une classe particulière d'équations aux différences partielles à trois variables, par M. <i>Poisson</i> .	410—414
Sur les diamètres principaux des surfaces du second degré; de la grandeur de ces diamètres; par M. <i>Monge</i> .	415—417
Autre solution du même problème, par M. <i>Hachette</i> .	417—419
Mémoire sur les sphères, par M. <i>Dupin</i> .	420—425
Théorème relatif aux sphères, démontré analytiquement, par M. <i>Hachette</i> .	425—429
Rectification d'un arc d'ellipse. — Formules de trigonométrie. — Quadratures par la considération des infiniment petits; par M. <i>de Stainville</i> .	429—437
Solution d'un problème de géométrie descriptive, par M. <i>Olivier</i> , élève.	437—439
Questions de mathématiques et de physique, proposées au concours général des lycées de Paris, et résolues par MM. <i>Giorgini</i> et <i>Duchayla</i> , élèves.	439—445
Note de M. <i>Monge</i> sur la solution de M. <i>Giorgini</i> et sur le quadrilatère gauche.	445
De la génération du paraboloïde hyperbolique et de l'hyperboloïde à une nappe, assujetties à passer par un quadrilatère gauche; par M. <i>Chasles</i> , élève.	446—447
Du dessin de la vis triangulaire, par M. <i>Hachette</i> .	447—457

§. II. — *Sciences physiques.*

Expériences sur le diamant , faites à l'Ecole Polytechnique par MM. *Guyton-Morveau* et *Hachette*. 457—467

Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps, par M. *Poisson*. 468—476

Nouvelles combinaisons chimiques, par MM. *Thénard*, *Gay-Lussac*, *Dulong*. 476—477

§. III.

Annonces. — Evénemens particuliers. 478—480

§. IV. — *Personnel.*

Promotions des anciens élèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs.

Nominations à des places dans l'Ecole Polytechnique.

Conseil de perfectionnement de 1812 à 1813.

Concours de 1812 , pour l'admission à l'Ecole Polytechnique , et dans les services publics. 481—491

Etat de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique, au 1<sup>er</sup>. janvier 1813. 492

*Cinq planches.*



Giometrie de la Regle  
par M<sup>r</sup> Brianchon

fig 1

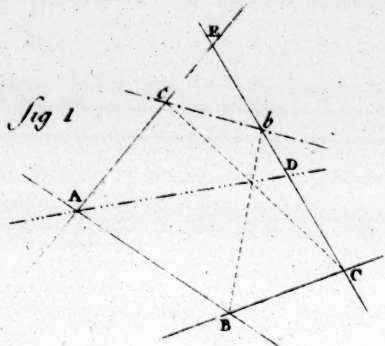


fig 2

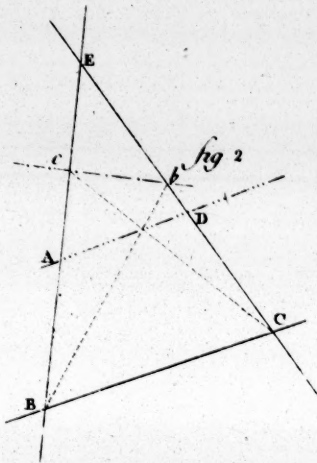


fig 3

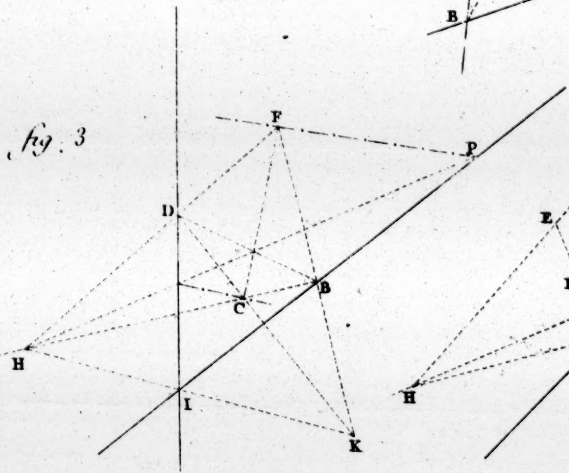


fig 4

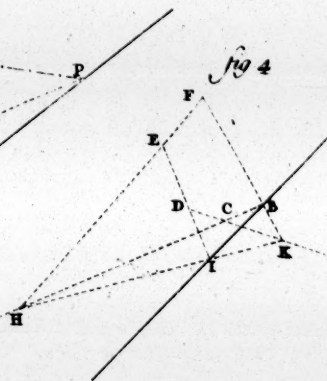


fig 5

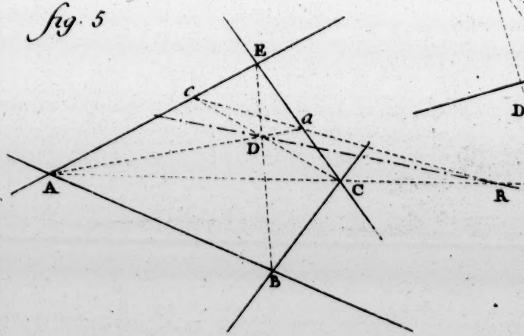
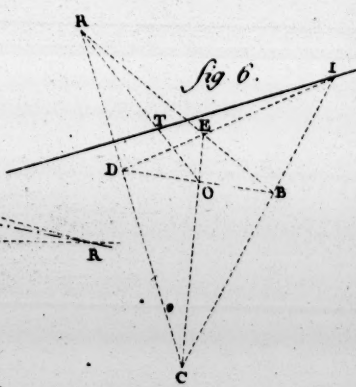


fig 6

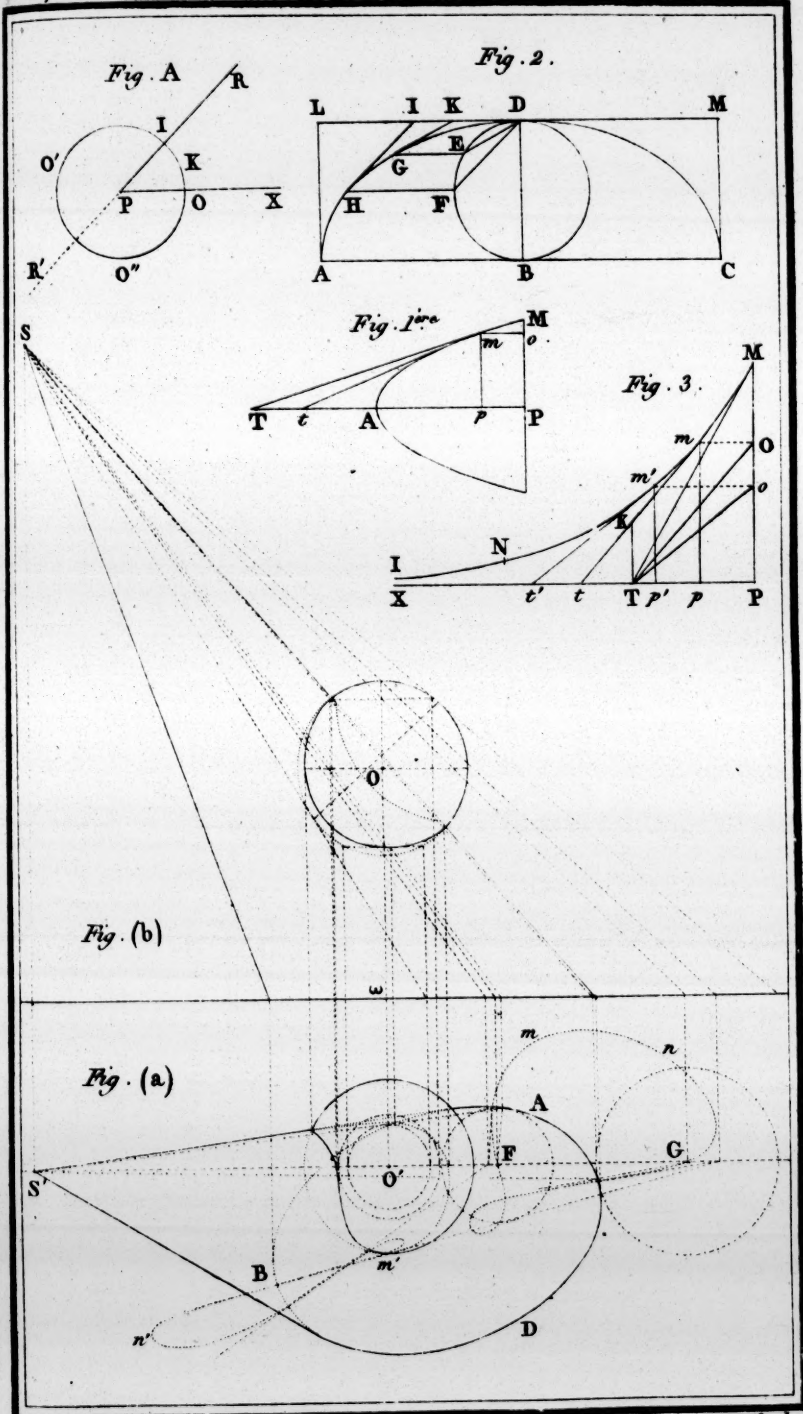


Corre

R

S

6



Girard del.

L. Stevigny Sculp.

De la Ligne de séparation  
d'ombre et de lumière sur les  
filets d'une vis triangulaire  
Par M. Hachette.

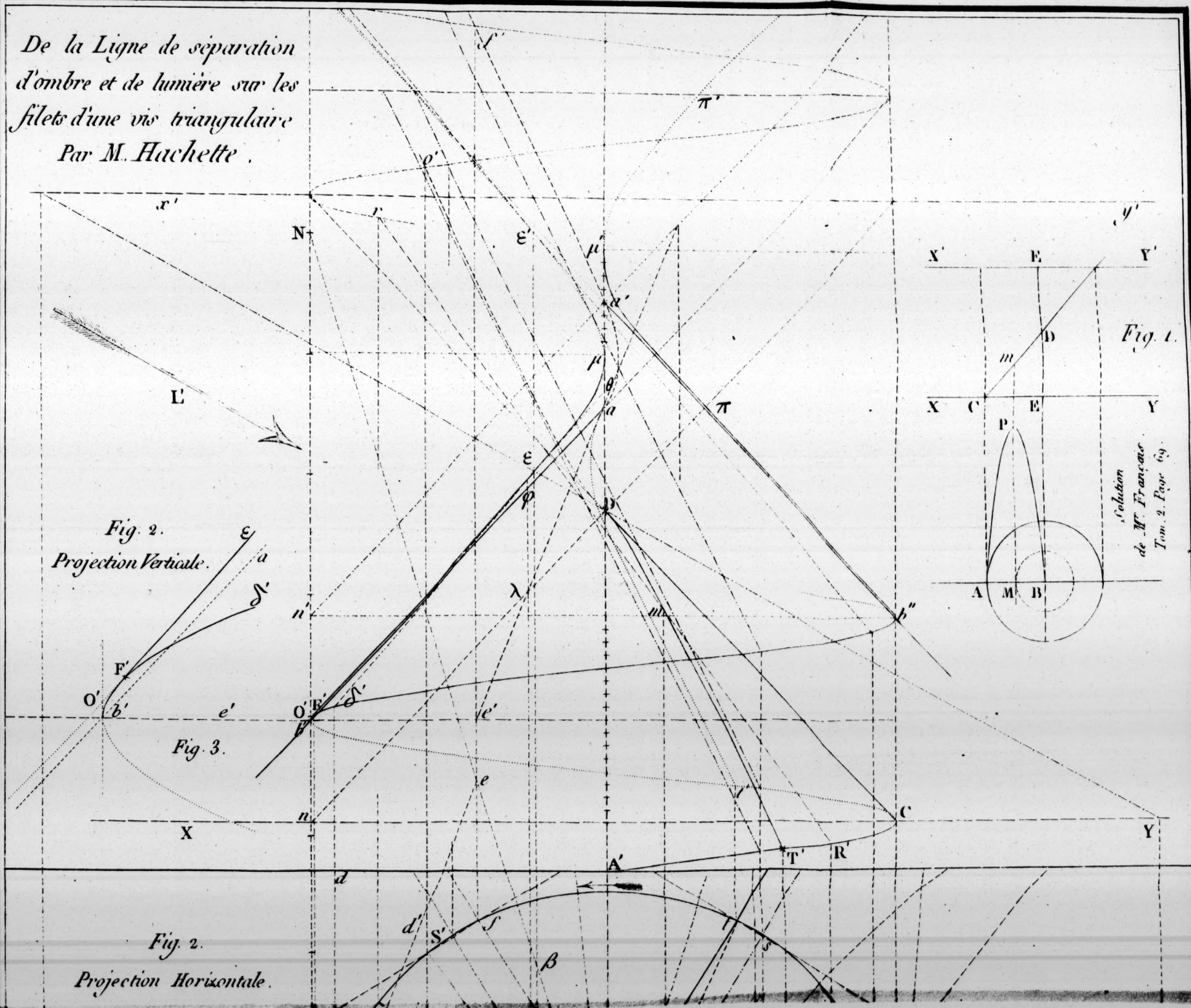


Fig. 2.  
Projection Verticale.

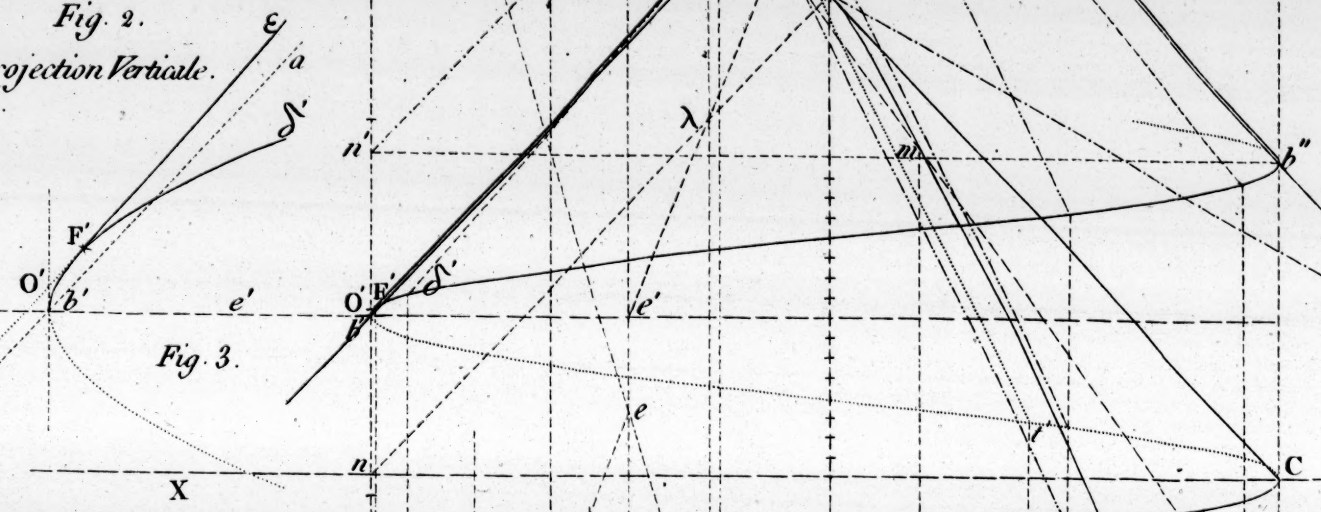


Fig. 3.

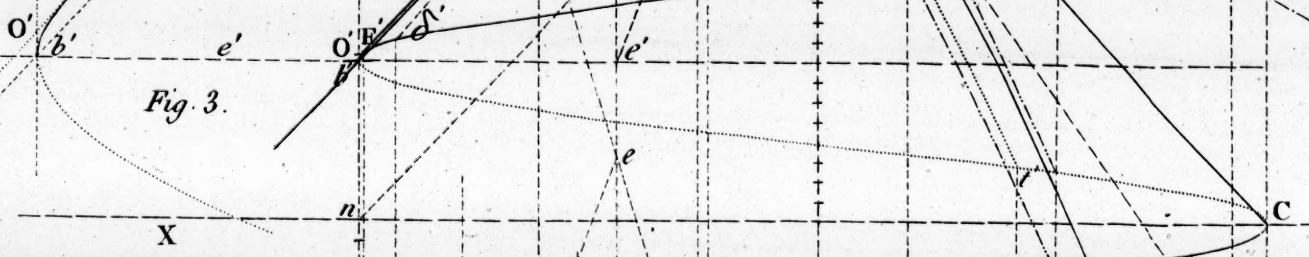


Fig. 2.  
Projection Horizontale.

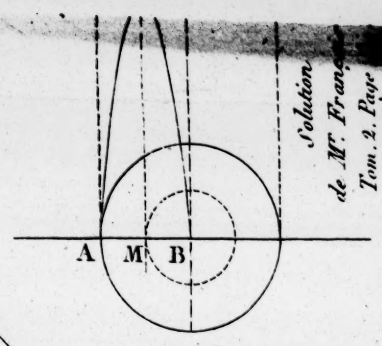
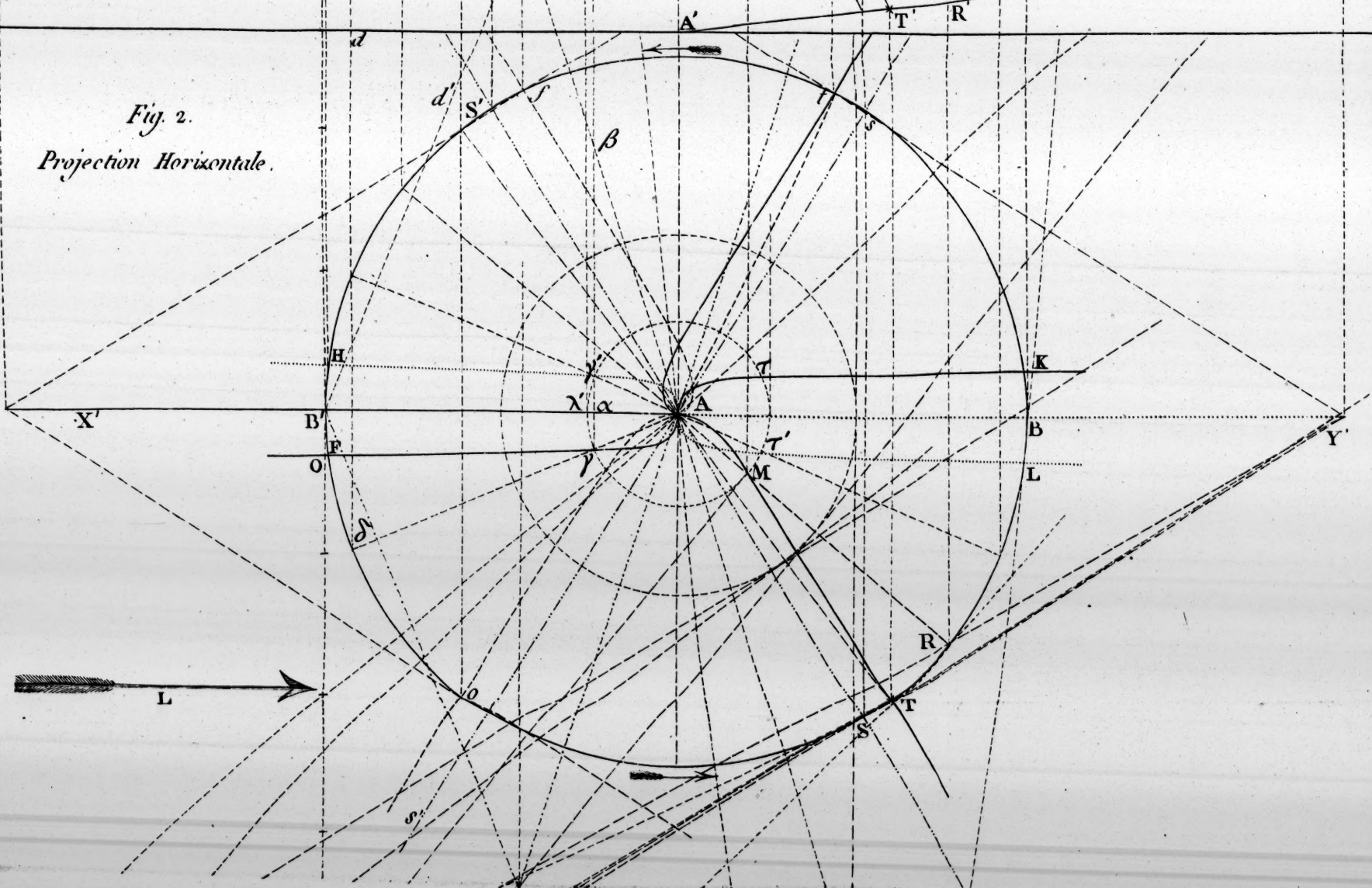
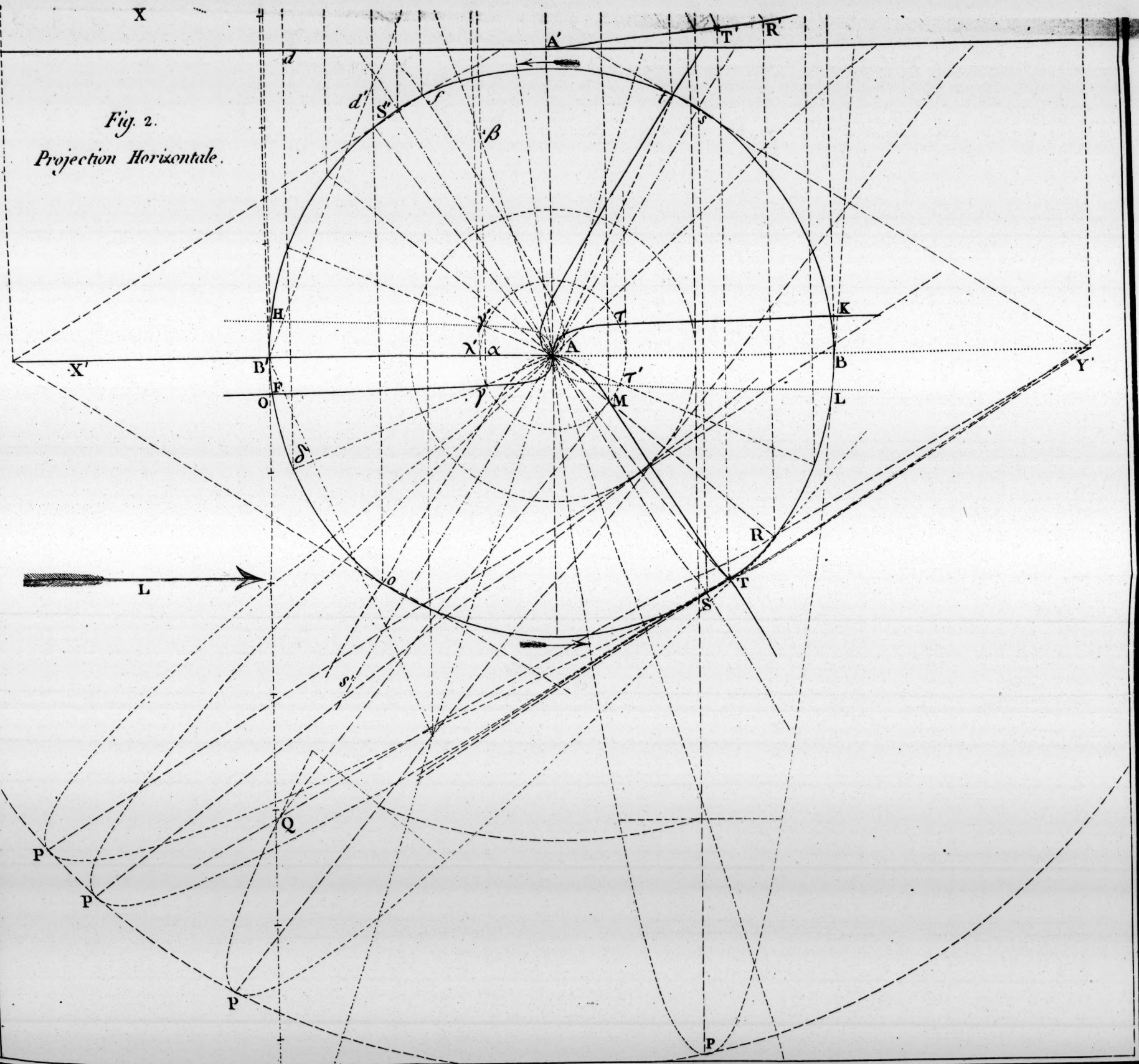
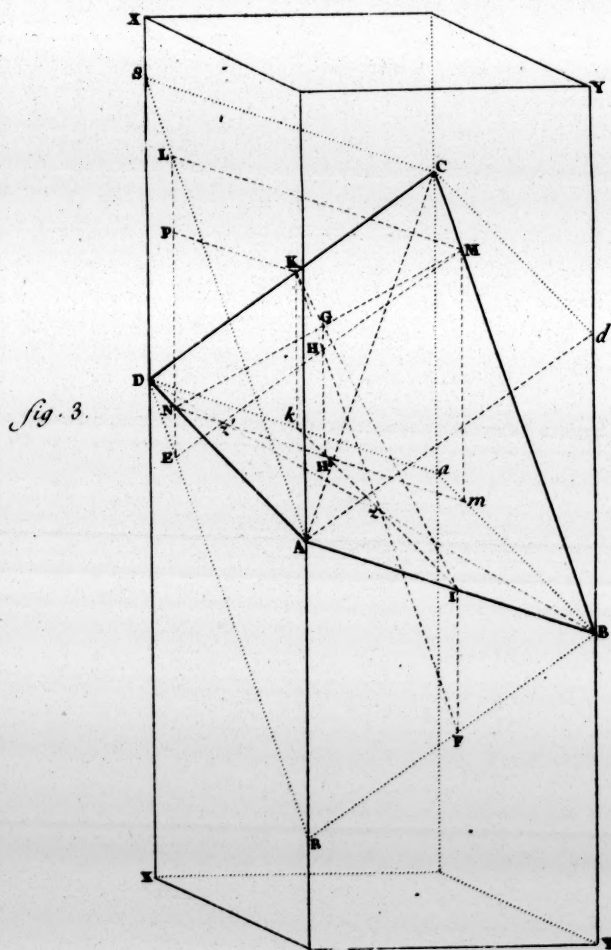
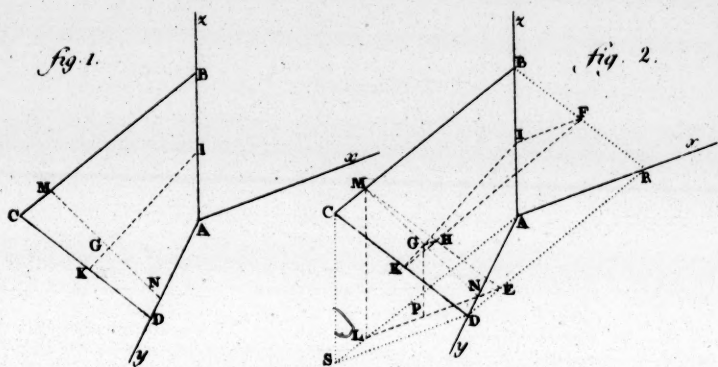


Fig. 2.  
Projection Horizontale.







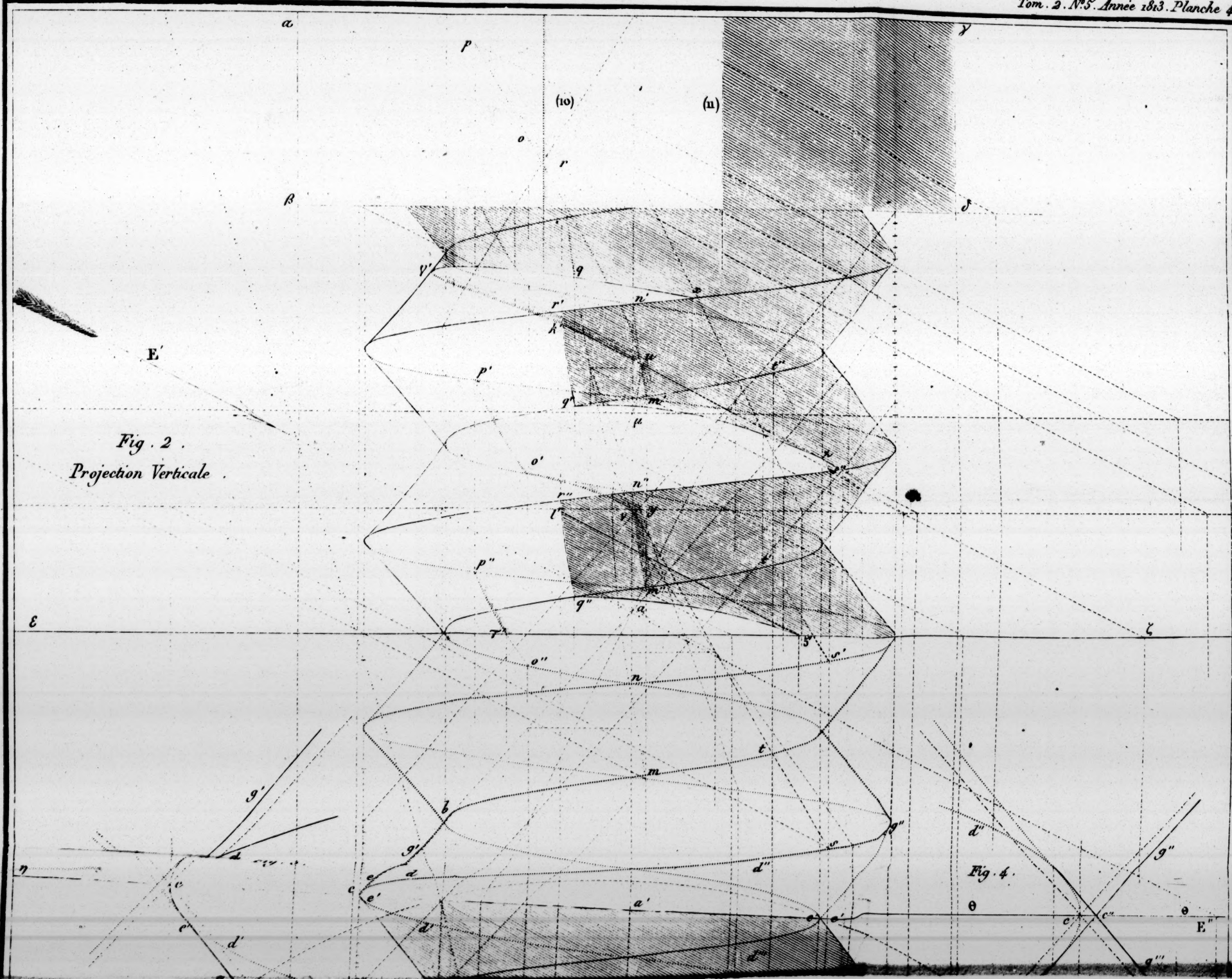
*Cours de Géométrie Descriptive, Par M. Hachette.*  
*Ecole du Génie des Machines.*

A  
f  
1

Correspondance sur l'Ecole Impériale Polytechnique.

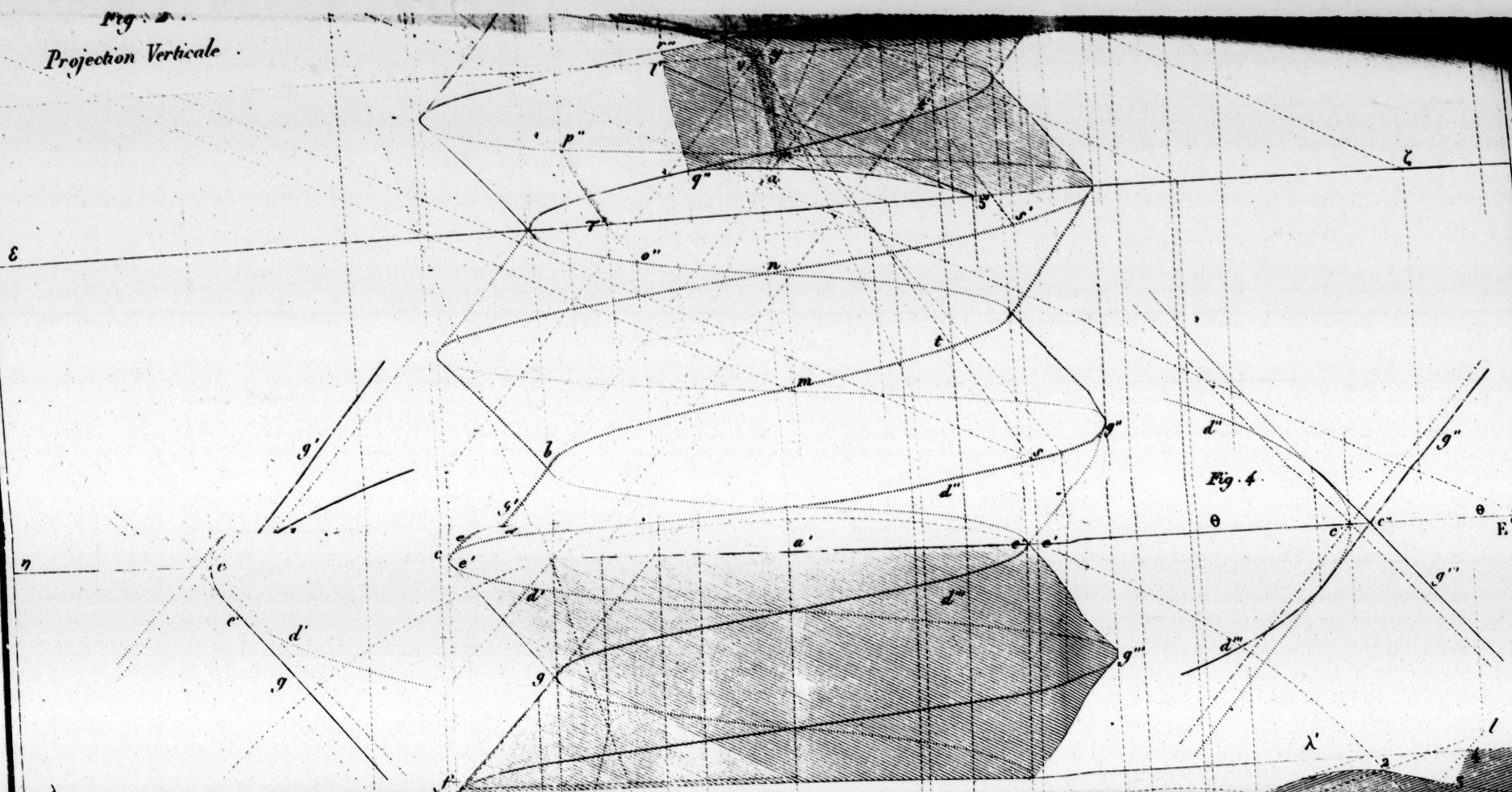
(Epure A)

Tom. 2. N. 5. Année 1813. Planche 4.

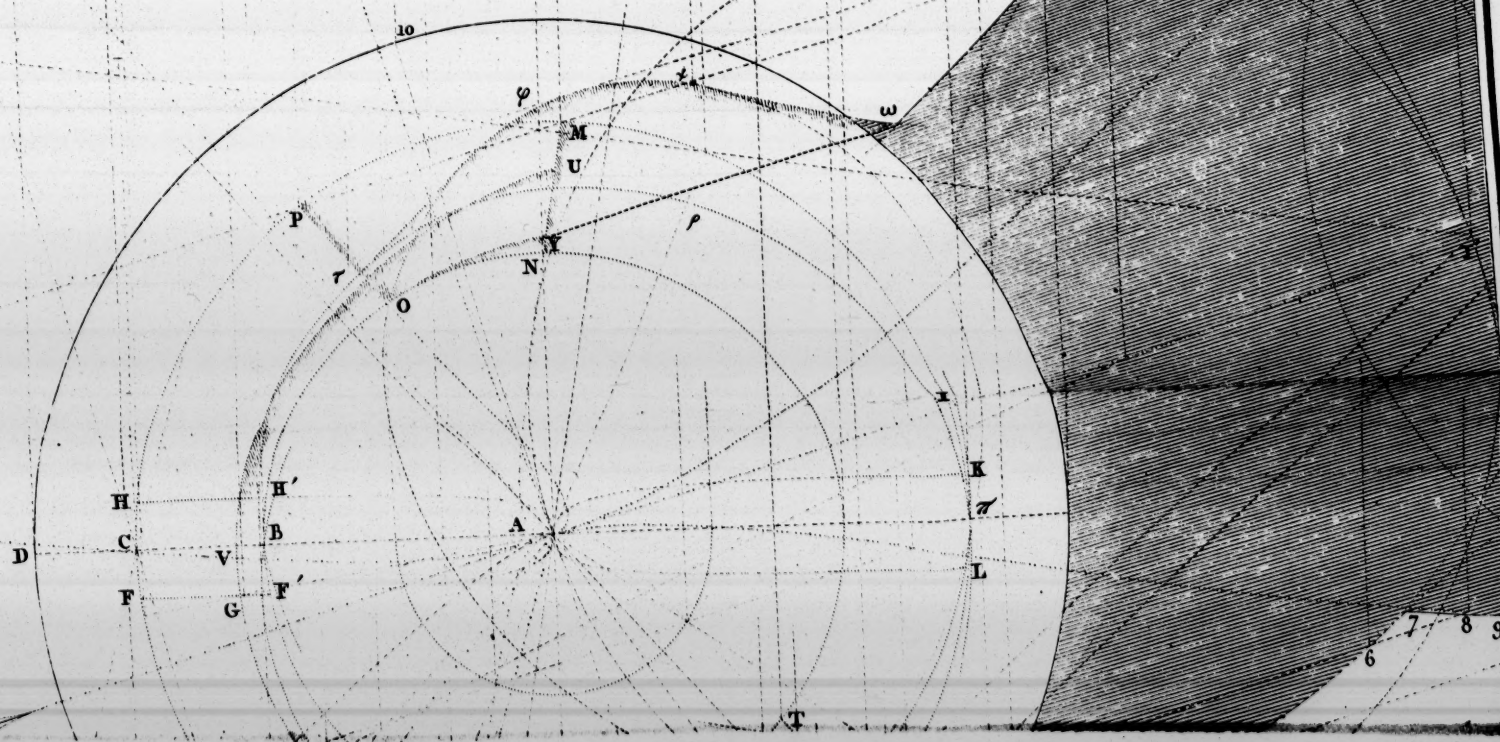


*Fig. 4.*

Fig. 2.  
Projection Verticale.



*Fig. 1<sup>re</sup>*  
*Projection Horizontale.*



*Fig. 1<sup>re</sup>*  
*Projection Horizontale.*

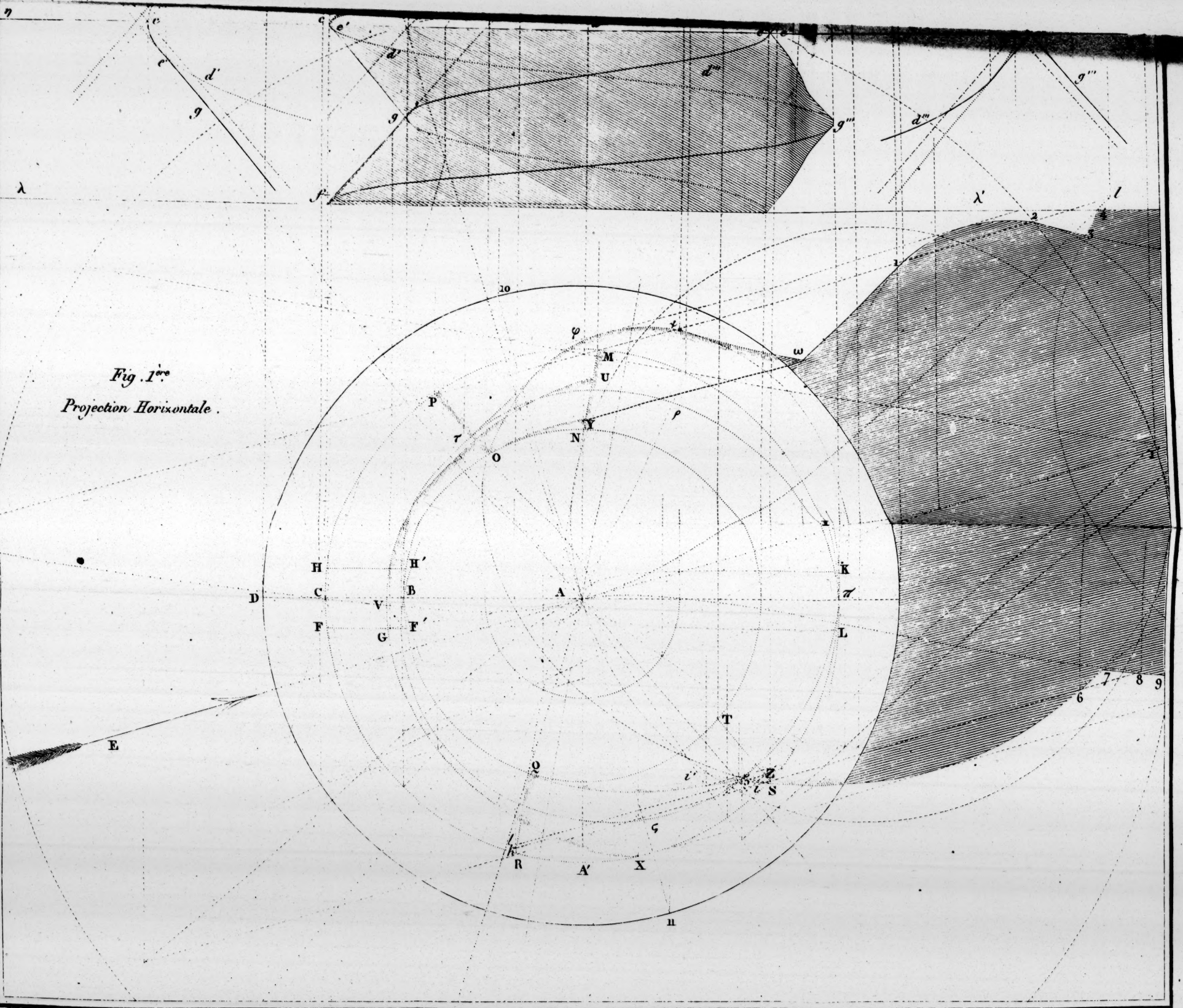


Fig. 2.  
Plan du Manchon OP  
et du Cercle R

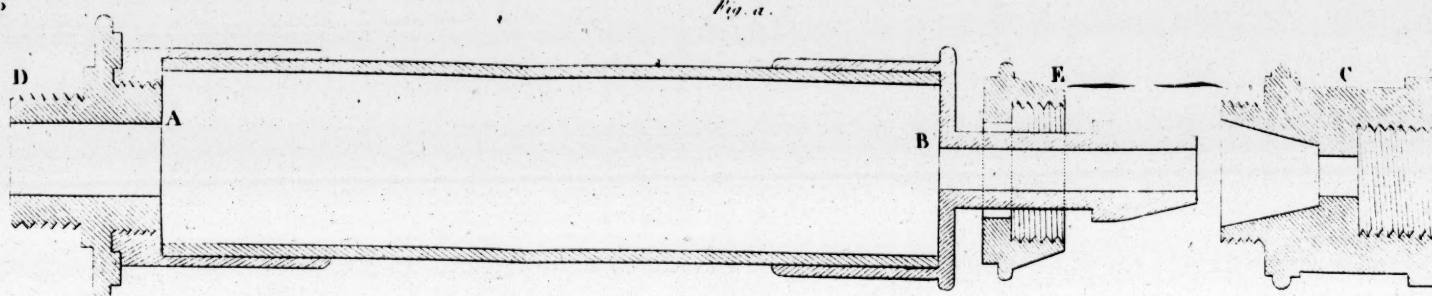
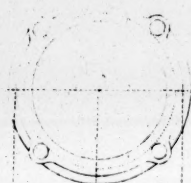


Fig. 1.

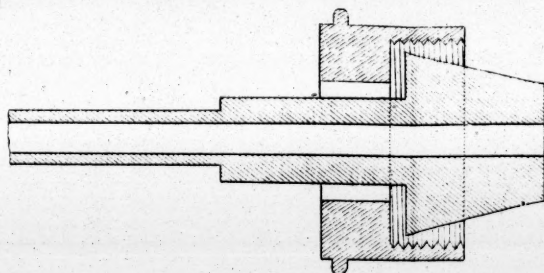
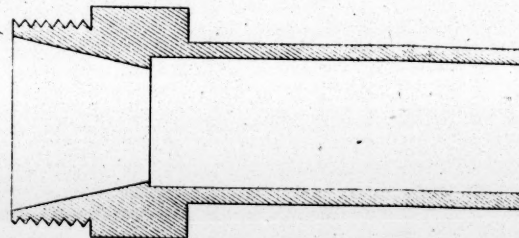


Fig. 3.



Echelle d'un Mètre pour Mètre.  
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Centimètres

Appareil pour la Combustion du Diamant.

Fig. 1<sup>re</sup>

